

# Otimização Topológica com Refinos *H*-adaptativos

**Universidade Federal de Santa Catarina**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

**Otimização Topológica com Refinos  $H$ -adaptativos**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Mecânica

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

**Florianópolis, novembro de 2003.**



# Universidade Federal de Santa Catarina

## Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

### Otimização Topológica com Refinos $H$ -adaptativos

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

### **Doutor em Engenharia**

Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

---

**Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.**  
Orientador

---

**José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr.**  
Coordenador do Programa de Pós-grad. em Eng. Mecânica

#### **Banca Examinadora:**

---

**Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.**  
Presidente da Banca Examinadora

---

**Emílio Carlos Nelli Silva, Ph.D.**  
Membro da Banca Examinadora

---

**José Carlos Pereira, Dr.**  
Membro da Banca Examinadora

---

**Luiz Eloy Vaz, Dr. Ing.**  
Membro da Banca Examinadora

---

**Mário César Zambaldi, Dr.**  
Membro da Banca Examinadora

## Dedicatória

**Esta tese é dedicada:**

**À minha amada mãe, Astrogilda de Oliveira Costa, uma  
alma magnânima, por ter incentivado e apoiado as  
minhas decisões, em todos os momentos da vida, com  
muito amor, carinho e longas horas de prazerosa conversa;**

**Ao meu pai, João Carlos Arantes Costa, pela  
confiança e apoio depositados em mim;**

**A minha irmã, Adriana, pela nossa grande união;**

**A minha maravilhosa tia Marina.**

## Agradecimentos

Ao professor Marcelo Krajnc Alves, pela excelente orientação, sua competência e maturidade científica foram fundamentais para a confecção deste trabalho. Além disso, o seu caráter nobre de compromisso com os estudos e a pesquisa não diminuiu a grande generosidade de compartilhar seus conhecimentos nem a atenção para a minha formação, colocando-se sempre a disposição. Sou grato também pelos conselhos, companheirismo e a grande amizade formada nestes anos.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa de estudos durante quatro anos.

Ao programa de Pós-graduação de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade de estudos.

Aos professores Emílio Carlos Nelli Silva, José Carlos Pereira, Luiz Eloy Vaz e Mário César Zambaldi por ter gentilmente participado da banca.

Ao Carlos Francisco do Amaral de Moura e Kleber Falchetti da Silva pelo divertido convívio e a família de Moura pela receptividade desde o início.

Aos amigos do laboratório Nederson da Silva Koehler, Valdir Mendes Cardoso, Analucia Vieira Fantin, Bruno Cesar Pockszewnicki, Lindaura Maria Steffens, Jefferson Ernani Hartmann, Hugo Dias e Carlos Henrique Santos que transcorreram durante o curso.

Ao Rogério Mâsih, Camilo de Moraes Diógenes e Márcio Silveira pelas saídas e farras que proporcionaram momentos de felicidade e muita descontração.

Ao Carlos Alexandre Camargo de Abreu, Hilbeth Parente Azikri de Deus, Raimundo Ricardo Matos da Cunha e Rodrigo Rossi pelo grande laço de amizade, parceria e companheirismo proporcionado nestes anos.

Em especial, à Magali de Oliveira Taumaturgo pela paciência, amor e carinho de todos esses anos. Seu apoio, atenção e incentivo nos momentos mais difíceis foram fundamentais para mim.

# Sumário

Dedicatória .....	iii
Agradecimentos .....	iv
Sumário .....	v
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Símbolos.....	xi
Resumo.....	xiii
Abstract.....	xiv
Capítulo 1.....	1
Revisão Bibliográfica .....	1
1.1 Introdução .....	1
1.2 Otimização estrutural.....	2
1.2.1 Otimização topológica .....	4
1.3 Objetivos e conteúdo do trabalho.....	8
Capítulo 2.....	11
Estruturas 2D sob Minimização da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri6.....	11
2.1 Introdução .....	11
2.2 Formulação do problema .....	13
2.2.1 Definição do problema .....	13
2.2.2 Descrição do modelo numérico.....	14
2.3 Modelo da microestrutura .....	15
2.4 Refino da malha com adaptatividade $h$ .....	17
2.4.1 Descrição geral do método.....	17
2.4.2 Estratégia de refino da malha.....	18
2.4.3 Processo de suavização Laplaciano condicional .....	20
2.5 Estimador de erro e critério de refino .....	21
2.5.1 Determinação de $\epsilon^*(\rho)$ .....	22
2.6 Resultados .....	23
2.7 Conclusão .....	34
Capítulo 3.....	36
Placas Espessas sob Minimização da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri6 .....	36

3.1	Introdução .....	36
3.2	Formulação do problema .....	37
3.2.1	Introdução .....	37
3.2.2	Definição do modelo da microestrutura .....	38
3.2.3	Formulação do problema de otimização de leiaute tridimensional .....	39
3.2.4	Teoria de placas de ordem superior .....	40
3.3	Formulação discreta do problema .....	43
3.4	Refino da malha com adaptatividade $h$ .....	45
3.4.1	Estimador de erro e critério de refino .....	45
3.5	Resultados .....	47
3.6	Conclusão .....	52
Capítulo 4	.....	54
Estruturas 2D sob Minimização da Flexibilidade	.....	54
Utilizando Elementos Tri3	.....	54
4.1	Introdução .....	54
4.1.1	Definição do problema .....	55
4.1.2	Condição necessária de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker .....	58
4.1.3	Modelos de microestruturas .....	59
4.2	Processo de discretização do problema .....	61
4.2.1	Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$ .....	62
4.2.2	Formulação discreta do problema de otimização .....	63
4.3	Refino da malha com adaptatividade $h$ .....	65
4.3.1	Descrição geral do método .....	65
4.3.2	Estratégia de refino da malha .....	66
4.3.3	Processo de suavização condicional Laplaciano .....	69
4.3.4	Estimador de erro .....	69
4.3.5	Determinação de $\sigma^*(\rho)$ .....	70
4.4	Resultados .....	71
4.5	Conclusão .....	78
Capítulo 5	.....	80
Placas de Mindlin-Reissner sob Min. da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri3	....	80
5.1	Introdução .....	80
5.2	Formulação do problema .....	81
5.2.1	Introdução .....	81
5.2.2	Formulação do problema de otimização de leiaute tridimensional .....	82

5.2.3 Teoria de placa de Mindlin-Reissner.....	83
5.2.4 Definição do modelo da microestrutura .....	84
5.3 Descrição do modelo de otimização de leiaute .....	87
5.3.1 Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$ .....	88
5.3.2 Formulação discreta do problema de otimização .....	89
5.4 Refino da malha com adaptatividade $h$ .....	91
5.4.1 Estimador de erro .....	91
5.4.2 Determinação de $\sigma^*(\rho)$ .....	92
5.5 Resultados .....	93
5.6 Conclusão .....	104
Capítulo 6.....	105
Estruturas 2D sob Minimização da Massa.....	105
Utilizando Elementos Tri3.....	105
6.1 Introdução .....	105
6.2 Definição do modelo material .....	109
6.2.1 Critério de tensão de falha com relaxação $\epsilon$ .....	110
6.3 Formulação do problema com relaxação.....	110
6.3.1 Restrição de tensão com relaxação integrada.....	111
6.4 Formulação discreta do problema.....	112
6.4.1 Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$ .....	113
6.4.2 Formulação discreta do problema de otimização .....	113
6.5 Refino da malha com adaptatividade $h$ .....	114
6.6 Resultados .....	114
6.7 Conclusão .....	128
A.1 Método do Gradiente Projetado .....	138
A.2 Aproximação quase-Newton .....	141

# Lista de Figuras

Figura 2.1: Caracterização do problema de otimização de leiaute.	12
Figura 2.2: Modelo de microestrutura porosa, proposto por Gea (1996).	15
Figura 2.3: Propriedades efetivas do material.	16
Figura 2.4: Estratégia de refino para elementos Tri6.	20
Figura 2.5: Elemento de transição compatibiliza a malha (caso Tri6).	20
Figura 2.6: Processo de suavização Laplaciano em elementos Tri6.	21
Figura 2.7: Definição do Problema (2.1).	24
Figura 2.8: Seq. de malhas resultantes do refino $h$ -adaptativo do prob. (2.1).	24
Figura 2.9: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.1).	25
Figura 2.10: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.1) com a malha inicial.	26
Figura 2.11: Definição do problema (2.2).	27
Figura 2.12: Seq. de malhas resultantes do refino $h$ -adaptativo do prob. (2.2).	27
Figura 2.13: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.2).	27
Figura 2.14: Definição do problema (2.3).	28
Figura 2.15: Seq. de malhas resultantes do refino $h$ -adaptativo do prob. (2.3).	29
Figura 2.16: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.3).	30
Figura 2.17: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.3) com a malha inicial.	31
Figura 2.18: Definição do problema (2.4).	31
Figura 2.19: Seq. de malhas resultantes do refino $h$ -adaptativo do prob. (2.4).	32
Figura 2.20: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.4).	33
Figura 2.21: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.4) com a malha inicial.	34
Figura 3.1: Caracterização geométrica da placa.	38
Figura 3.2: Definição do problema (3.1).	48
Figura 3.3: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.1).	48
Figura 3.4: Definição do problema (3.2).	50
Figura 3.5: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.2).	51
Figura 3.6: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.3).	52
Figura 4.1: Discretização do elemento finito para problemas 2D.	61
Figura 4.2: Coordenadas do elemento finito Tri3.	62
Figura 4.3: Condição de simetria no eixo- $x$ .	63

Figura 4.4: Condição de simetria no eixo- $y$ .	63
Figura 4.5: Estratégia de refino para elementos Tri3.	67
Figura 4.6: Elemento de transição compatibiliza a malha (caso Tri3).	67
Figura 4.7: Processo de suavização Laplaciano em elementos Tri3.	69
Figura 4.8: Estrutura de Michell, utilizando microestrutura de Gea.	72
Figura 4.9: Estrutura de Michell, utilizando microestrutura SIMP.	73
Figura 4.10: Placa com furo, utilizando microestrutura de Gea.	74
Figura 4.11: Placa com carga cisalhante, utilizando microestrutura de Gea.	75
Figura 4.12: Viga em balanço, utilizando microestrutura de Gea.	76
Figura 4.13: Viga em balanço, utilizando microestrutura SIMP.	76
Figura 4.14: Viga L, utilizando microestrutura de Gea	77
Figura 4.15: Viga L, utilizando microestrutura SIMP	78
Figura 5.1: Discretização do elemento finito para prob. de placa semi-espessa.	87
Figura 5.2: Definição do problema (5.1).	93
Figura 5.3: Seq. de leiautes ótimos da placa c/ carga na extremidade	94
Figura 5.4: Seq. de leiautes ótimos da placa c/ carga na extremidade	95
Figura 5.5: Definição do problema (5.2).	96
Figura 5.6: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada com carga central	97
Figura 5.7: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada com carga central	98
Figura 5.8: Definição do problema (5.3).	99
Figura 5.9: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada nas extremidades.	100
Figura 5.10: Definição do problema (5.4).	101
Figura 5.11: Seq. de leiautes ótimos da placa sob flexão	102
Figura 5.12: Definição do problema (5.5).	103
Figura 5.13: Seq. de leiautes ótimos da placa sob flexão	103
Figura 6.1: Resultado do prob (6.1), malha inicial com 2299 elementos.	116
Figura 6.2: Resultado do prob (6.1), segunda malha com 6030 elementos.	117
Figura 6.3: Resultado do prob (6.1), terceira malha com 17175 elementos.	118
Figura 6.4: Resultado do prob (6.2), malha inicial com 1776 elementos.	119
Figura 6.5: Resultado do prob (6.2), segunda malha com 4136 elementos.	119
Figura 6.6: Resultado do prob (6.2), terceira malha com 10995 elementos.	120
Figura 6.7: Resultado do prob (6.3), malha inicial com 837 elementos.	121
Figura 6.8: Resultado do prob (6.3), segunda malha com 2048 elementos.	122
Figura 6.9: Resultado do prob (6.3), terceira malha com 5629 elementos.	123
Figura 6.10: Resultado do prob (6.3), quarta malha com 16674 elementos.	124



Figura 6.11: Resultado do prob (6.4), malha inicial com 1412 elementos.	125
Figura 6.12: Resultado do prob (6.4), segunda malha com 4772 elementos.	126
Figura 6.13: Resultado do prob (6.4), terceira malha com 15915 elementos.	127

# Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
$A_e$	área do $e$ -ésimo elemento triangular
$\mathbf{b}$	vetor de força de corpo
$C_x$ e $C_y$	limites das derivadas parciais da densidade relativa
$\mathbf{D}^H$	equação constitutiva homogeneizada
$\mathbf{e}_x$ , $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$	vetores que formam a base cartesiana ortonormal
$E_o$	módulo de Young do material completamente denso
$E$	módulo de Young do material relativo a densidade (porosidade)
$G_o$	módulo de cisalhamento do material completamente denso
$G$	módulo de cisalhamento do material relativo a densidade (porosidade)
$h$	espessura da placa
$H$	conjunto dos deslocamentos admissíveis
$H_o$	conjunto das variações admissíveis
$J_r$	conjunto de elementos a serem refinados
$L_{\max}^e$	comprimento da maior aresta do $e$ -ésimo triângulo
$n$	número de nós da malha
$\mathbf{n}$	vetor normal
$n_d$	número de nós do elemento
$n_e$	número de elementos da malha
$n_v$	número de nós dos vértices adjacentes associado a um definido nó
$N_j$	função interpolação clássica do elemento finito considerado
$P_e$	metade do perímetro do elemento triangular
$Pref(\bullet)$	ponteiro de vetor que identifica os elementos que serão refinados
$Q(e)$	medida de qualidade do $e$ -ésimo elemento
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbf{t}$	vetor de tração
$\bar{\mathbf{t}}$	vetor de tração prescrita
$\mathbf{u}$	vetor de deslocamento admissível
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamento prescrito
$\mathbf{v}$	vetor de deslocamento virtual

$\mathbf{x}$	vetor posição
$\bar{\mathbf{x}}$	vetor posição teste
$\mathbf{X}$	conjunto que define as variáveis de projeto
$\alpha$	fração de volume prescrito
$\eta$	parâmetro de penalidade microestrutural
$\epsilon$	parâmetro de relaxação de tensão
$\varepsilon$	parâmetro de penalidade da função Lagrangiana Aumentada
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor deformação linear elástico
$\varphi$	parâmetro que define o critério de refino quanto ao erro calculado
$\lambda, \kappa, \mu$	multiplicadores de Lagrange
$\Lambda$	superfície média de referência
$\Theta_e$	erro local do elemento
$\Theta_G$	erro global
$\nu_o$	coeficiente de Poisson do material completamente denso
$\rho$	densidade relativa
$\rho_{\text{inf}}$	limite inferior da densidade relativa
$\rho_{\text{sup}}$	limite superior da densidade relativa
$\boldsymbol{\rho}$	vetor de densidade relativa
$\varsigma$	Variável de penalidade da função de mapeamento não linear
$\varpi$	função de mapeamento não linear
$\Gamma_{\mathbf{u}}$	parte do contorno com deslocamento prescrito
$\Gamma_{\mathbf{t}}$	parte do contorno com tração prescrita
$\Omega$	domínio do corpo
$\partial\Omega$	contorno do domínio
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor tensão
$\boldsymbol{\sigma}_y$	tensão de escoamento
$i, j$ e $k$	variáveis auxiliares
$L_2$	espaço de Hilbert equipado com norma, ver definição em Medeiros & Miranda (2000).
$W^{m,p}$	espaço de Sobolev equipado com norma, ver definição em Medeiros & Miranda (2000).

## Resumo

O objetivo deste trabalho é propor um processo metodológico para a determinação de leiautes estruturais ótimos, que seja competitivo e capaz de proporcionar leiautes de alta definição.

O processo proposto consiste na solução de uma sequência de problemas de otimização de leiaute intercalado por um passo de refino  $h$ -adaptativo. A malha de elementos finitos a ser otimizada, em cada nível do processo, é obtida da malha anterior, pela aplicação de um esquema de refino  $h$ -adaptativo. Um estimador de erro é utilizado para minimizar a deterioração da malha e o erro da solução com a aplicação do processo  $h$ -adaptativo. O método de otimização de leiaute empregado é baseado na abordagem material proposta por Bendsoe & Kikuchi (1988). Assim a equação constitutiva homogeneizada é função apenas da densidade relativa do material.

Uma abordagem inicial é proposta, a qual faz uso de elementos finitos do tipo Tri6 Lagrangiano subparamétrico. O processo é aplicado a problemas de minimização da flexibilidade em problemas bidimensionais e de placas espessas sob hipóteses cinemáticas de ordem superior. O modelo considera constante o campo de densidades relativas no interior do elemento, sendo assim, as variáveis de projeto são definidas como sendo as densidades relativas dos elementos. Para a descrição das propriedades materiais, utiliza-se uma formulação microestrutural baseada na teoria de material composto, proposta por Gea (1996). Os resultados obtidos proporcionaram leiautes com alta definição da topologia estrutural, mas com ligeira dependência da solução com a malha inicial.

Posteriormente é proposta uma abordagem mais competitiva, a qual utiliza um elemento finito do tipo Tri3 Lagrangiano, que interpola o campo de densidades relativas além das componentes do campo de deslocamentos. O processo é aplicado inicialmente a problemas de minimização da flexibilidade em problemas bidimensionais e de placas semi-espessas sob hipóteses cinemáticas de Mindlin-Reissner. Posteriormente, o processo proposto é aplicado a problemas de minimização da massa sob restrição de tensão, a formulação considera um critério de tensão de medida global. Aqui, a microestrutura utilizada para a descrição das propriedades materiais é do tipo SIMP. A abordagem reduz consideravelmente o custo computacional, mostrando ser muito efetiva e robusta. Os resultados proporcionaram leiautes refinados com nítida definição da topologia e da forma da estrutura. Além disso, a formulação de minimização da massa com critério global de tensão, proporcionou leiautes estruturais “prontos” para a manufatura, com violação máxima do critério de tensão de apenas 2%.

# Abstract

The objective of this work is to propose a procedure for the determination of optimum layouts of structures, which is competitive and capable of providing high-resolution layouts.

The proposed procedure consists in the solution of a sequence of layout optimization problems followed by an  $h$ -adaptive refinement step. The finite element mesh, employed in each layout optimization problem, was obtained from the previous mesh with the application of an  $h$ -adaptive refinement scheme. In addition, an error estimator was employed in the refinement strategy with the aim of alleviating the mesh deterioration, due to the remeshing process. Here, the layout optimization problem is based on the material approach proposed by Bendsoe & Kikuchi (1988) and considers a homogenized constitutive equation that depends solely on the relative density of the material.

An initial procedure was proposed, which used a classical subparametric Tri6 element. The procedure was applied to compliance minimization problems in plane stress and thick plate problems. In this procedure, the relative density is considered to be constant in the interior of each element. As a result, the design variables are given by the relative densities of each element. The microstructural model considered in this case was the one proposed by Gea (1996). The results obtained by the proposed procedure provided high definition optimal layouts, but presented an initial mesh dependence of optimal layout.

Another procedure was proposed with the aim of circumventing some of the drawbacks of the first procedure. This new procedure used a conventional Tri3 element, which interpolated not only the components of the displacement field but also the relative density field. The procedure was initially applied to compliance minimization problems of plane stress and moderate thick plates problems. Later, the procedure was applied to mass minimization problems under local stress constraints. In order to cope with the parametric local stress constraint, a global criterion was introduced. The microstructures used in this procedure were the SIMP and Gea models. The proposed procedure reduces considerably the computational cost, when compared with the pixel approach; is very robust and provides optimal refined layouts with a very sharp definition of the associated optimal shape of the structure. Moreover, the stress formulation provided “ready” to manufacture optimal layouts, with maximum violation of the local stress constraints of only 2%.

# Capítulo 1

## Revisão Bibliográfica

### 1.1 Introdução

Até meados do século passado, os projetos de engenharia eram concebidos como um tipo de “arte” que demandava grande perícia e experiência do projetista. O processo de projeto geralmente era um processo sequencial de “tentativa e erro” no qual a experiência e prática do projetista eram os mais importantes pré-requisitos para terem sucesso neste processo iterativo. Atualmente a forte competição tecnológica vem requerendo:

- A redução do tempo de projeto e do custo dos produtos, mantida a alta qualidade e funcionalidade do produto;
- O empenho na economia de energia e a reutilização dos recursos materiais, tudo isso sem esquecer as suas implicações ambientais.

Muitas vezes o projeto envolve a criação de novos e sofisticados produtos, para os quais freqüentemente a intuição falha. O desenvolvimento de tais produtos deve ser naturalmente assistido com a aplicação de ferramentas computacionais, baseadas em métodos científicos bem estabelecidos, visando às análises da estrutura e de sensibilidade e à otimização do projeto.

A pesquisa científica na área de análise estrutural tem aumentado, de forma considerável, nestas últimas décadas. O aumento do interesse nesta área tem sido fortemente impulsionado pelo advento da computação de alta performance e pelo desenvolvimento de métodos computacionais confiáveis, tais como: o Método dos Elementos Finitos; os métodos de análise de sensibilidade da estrutura, com relação às variáveis de projeto; os métodos de programação matemática, etc. Isto se deve, sobretudo, ao aumento da velocidade e da capacidade dos computadores digitais. O rápido desenvolvimento dos métodos de otimização estrutural também reflete uma mudança natural na área de análise e síntese do projeto. Conforme Vanderplats (1994), denota-se que: análise é o processo de determinação da resposta de um determinado sistema, quando submetido a um conjunto de cargas, por exemplo, a

determinação do campo de tensões e deformações atuando em uma estrutura como resultado de um conjunto de cargas aplicadas; projeto é usado para especificar o processo atual utilizado na definição do sistema, por exemplo, o projeto da estrutura requer a definição das dimensões e do leiaute ótimo dos membros, necessários para suportar um determinado conjunto de cargas prescritas. Logo, a análise é um subproblema no processo de projeto que ajuda a avaliar a performance do projeto. Para aumentar a eficiência do projeto pode ser utilizado algum método de otimização, o qual pode ser definido como o processo de determinação do mínimo ou do máximo de alguma função mérito, também denominada função objetivo. A adequação de um projeto requer também a satisfação de um conjunto de requisitos especificados, os quais são chamados de restrições de projeto. Tanto a função objetivo quanto às restrições de projeto podem ter características de análise ou de síntese de projeto, por exemplo, minimizar a massa de uma estrutura visando atender um limite de tensão especificado.

O desenvolvimento de procedimentos para a análise e a determinação da sensibilidade da resposta da estrutura, associados com técnicas de programação matemática, possibilitam a otimização de componentes estruturais. Objetivando uma melhor compreensão da evolução histórica nesta área, são apresentadas nas próximas seções: uma revisão bibliográfica do desenvolvimento da teoria de otimização aplicada em estruturas; uma sucinta descrição dos objetivos e propostas deste trabalho.

## 1.2 Otimização estrutural

Os princípios básicos da teoria de otimização de leiaute foram mostrados inicialmente por Michell (1904). Inicialmente, o trabalho de Michell foi pouco apreciado por seus contemporâneos, sendo referenciado apenas no final dos anos 50, como no trabalho de Cox (1958). Assim, a utilização das técnicas de otimização numérica, para projetos de engenharia, foi popularizada inicialmente com Schmit (1960) e posteriormente com Fox (1965). Eles aplicaram técnicas de otimização não linear para projetos de estruturas, mas na prática os projetos ainda utilizavam muita intuição e tinham pouca solidez matemática.

A otimização estrutural dos anos 60 era restrita à otimização dimensional de estruturas de treliças. Só nos anos 70, alguns problemas de leiaute foram também resolvidos, como os de Hemp (1973) e o de Prager (1974), ambos para uma classe

muito restrita de estruturas, vistos como uma extensão do conceito de otimização de estruturas de treliças, desenvolvido por Michell (1904). Em seguida, Prager & Rozvany (1977), Rozvany (1981), Rozvany & Wang (1983) e Zhou & Rozvany (1991) apresentaram um desenvolvimento mais geral da teoria de Michell (1904). Maiores detalhes sobre otimização do leiaute de estruturas de treliças podem ser encontrados nos trabalhos de revisão feitos por Kirsch (1989), Rozvany (1992) e, com uma abordagem mais recente, em Rozvany *et al.* (1994), nos quais muitas outras referências podem ser encontradas. Entretanto, tanto a otimização do leiaute das estruturas de treliças como também as otimizações dimensionais e de forma em geral, não atraíram muito a atenção dos projetistas. Isto se deve às técnicas existentes que não eram suficientemente robustas para lidar com problemas complexos de projeto e, mais importante, a constatação de que algumas das classes de problemas de otimização não eram bem postas, como indicado por Kohn & Strang (1986). Para tornar o problema bem posto, eles sugeriram a relaxação do problema de projeto original, através da introdução de um material composto fictício, contendo uma microestrutura caracterizada pela presença de *vazios* (porosidade). Este procedimento deu origem à formulação de problemas de otimização de leiaute como problemas de distribuição ótima de materiais. Uma observação similar, referente à necessidade da abordagem por meio de materiais compostos, foi feita por Murat & Tartar (1985), quando da abordagem de problemas de otimização de forma em condução de calor. Entretanto, é justo salientar que a necessidade da utilização de microestruturas nervuradas, com escalas muito finas, como forma de regularização do problema, já tinha sido apontada por Cheng & Olhoff (1981), em seus estudos de otimização da espessura de placas, o que acarretou em vários trabalhos de investigação, nesta linha de problemas. O primeiro grande trabalho de matemáticos da área aplicada, em resposta às observações de Cheng & Olhoff (1981), foi o de Lurie & Cherkhev (1984) os quais foram seguidos por muitos outros pesquisadores nas escolas francesas e americanas.



## 1.2.1 Otimização topológica

### 1.2.1.1 Caracterização

O problema de otimização de leiaute<sup>1</sup> em geral, pode ser caracterizado como a determinação da distribuição ótima de material no espaço de projeto. Em outras palavras, para um determinado conjunto de cargas e condições de contorno, o problema é como distribuir o material de modo a minimizar uma função objetivo. Sendo assim, o problema de otimização de leiaute pode ser considerado como um problema pontual material/vazio. Entretanto, a implementação desta abordagem para um problema de otimização 0-1, requer o uso de algoritmos de otimização discreta, tornando a abordagem instável. Para contornar o problema de instabilidade adota-se em geral, como forma de relaxação, a abordagem de material composto, como proposto por Kohn & Strang (1986). Em adição, conforme Bendsoe (1989), pode-se mostrar a existência de soluções para problemas formulados como sendo de distribuição ótima de materiais, usando uma abordagem de material composto.

A abordagem material consiste em considerar o material como sendo um material composto constituído por uma microestrutura periódica, a qual é caracterizada por um conjunto de parâmetros. Mediante esta abordagem, a natureza complexa do problema de otimização de leiaute pode ser convertida em um problema de otimização de parâmetros. De fato, a idéia de se utilizar um corpo constituído por microestruturas periodicamente distribuídas, remove a natureza 0-1 do problema de escala macroscópica para a escala microscópica, ver Bendsoe (1989). Em termos matemáticos, a introdução de microestruturas corresponde à relaxação do problema variacional que pode ser estabelecida para o problema de otimização, ver Kohn & Strang (1986).

Existem na literatura muitos modelos de microestruturas, esses modelos podem ser classificados basicamente em três grupos:

- modelos de compósitos laminados tipo *rank*;
- modelos de microcélulas com vazios internos;
- modelos artificiais.

---

<sup>1</sup> O termo leiaute, apesar de menos utilizado na literatura, é mais adequado para definir a disposição dos membros estruturais, do que o termo topologia. No contexto o autor utiliza os dois termos como sinônimos.

A determinação das propriedades mecânicas macroscópicas destes materiais é feita pela teoria da homogeneização. No caso de materiais do tipo *rank* a equação constitutiva homogeneizada pode ser determinada analiticamente. Entretanto, para os modelos com microcélulas complexas, normalmente as propriedades são determinadas por procedimentos numéricos.

### 1.2.1.2 Desenvolvimento histórico

O processo de relaxação tem contribuído para o desenvolvimento de técnicas modernas para a otimização do leiaute estrutural. Uma das mais importantes técnicas de otimização de leiaute foi proposta por Bendsoe & Kikuchi (1988). O trabalho faz uso da abordagem material e objetiva à determinação do leiaute ótimo de estruturas, sujeitas a um conjunto de restrições de projeto. Para a regularização do problema, foram introduzidos *infinitos* furos retangulares de escala *infinitamente* pequena, e periodicamente distribuídos, em todo o domínio de projeto. De fato, a microestrutura obtida mostrou ter, de maneira intrínseca, as características básicas necessárias para a relaxação do problema. A derivação do modelo mecânico equivalente homogeneizado da estrutura porosa, i.e., da determinação das propriedades ortotrópicas equivalentes do material, foi obtida pela aplicação da teoria da homogeneização, ver Sanchez-Palencia (1980), para a teoria geral, e Guedes e Kikuchi (1990), para a implementação computacional. No trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), o critério de otimização visava maximizar a rigidez global estática de estruturas bidimensionais, de material elástico linear, sendo a estrutura submetida à aplicação de carregamentos mecânicos prescritos. Os resultados obtidos por Bendsoe & Kikuchi (1988) não eram muito nítidos, i.e., nem a forma e nem a topologia da estrutura eram adequadamente definidas. Isso se deve provavelmente à inadequação do algoritmo utilizado no recálculo do ângulo ótimo (rotação) dos furos. No ano seguinte, Pedersen (1989) com um trabalho direcionado à classe de problemas de otimização de microestruturas, representando materiais compostos reforçados por fibras, conseguiu derivar as condições corretas para a determinação do ângulo ótimo. Suzuki (1991) e Suzuki & Kikuchi (1991) estenderam o trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), onde foram aplicadas as considerações propostas por Pedersen (1989) e Gibiansky & Cherkaev (1987). Neste trabalho, o ângulo de rotação foi identificado pela direção das tensões principais, mas não foram obtidas soluções estáveis.

Neste ponto, é importante ressaltar que a técnica de relaxação empregada, caracterizada pela utilização de uma microestrutura porosa, possibilitou a determinação de leiautes ótimos possuindo uma grande quantidade de material composto, i.e., material cuja microestrutura apresenta uma densidade intermediária. A presença de material composto é indesejável, já que dificulta a definição da forma e do leiaute ótimo da estrutura. Isto, sem comentar sobre a dificuldade de se obter o produto e a elevação dos custos, ambos inviabilizados pelo aumento da tecnologia e etapas de fabricação a serem empregados no processo produtivo deste material.

Para contornar esta dificuldade, introduziu-se um tipo de penalidade obtida pela introdução de uma microestrutura artificial, modificando o tensor elasticidade homogeneizado ou acrescentando um funcional tendente (funcional penalidade) para uma célula vazia (porção de microestrutura com densidade nula) ou célula sólida (porção de microestrutura sem porosidade), ver Rozvany *et al.* (1992) e Haber *et al.* (1994).

O aparecimento de instabilidades na solução, caracterizadas por uma formação xadrez no leiaute ótimo, que se assemelha com um tabuleiro de damas, do original em inglês *checkerboard solution problems*, teve que ser contornada através da modificação da formulação dos problemas ou da utilização de filtros. Segundo Bendsoe (1995) a origem da formação de xadrez está relacionada às características de aproximação do elemento finito e são de mesma natureza que os padrões observados em algumas análises de elementos finitos, na distribuição espacial de pressão de escoamento de fluidos de Stokes. Essa hipótese é sustentada no fato de que as soluções encontradas para controlar os problemas de escoamento de fluidos de Stokes também funcionam nos problemas de homogeneização.

Uma quantidade considerável de trabalhos tem sido apresentada objetivando a determinação do leiaute ótimo de componentes estruturais. Entretanto a grande maioria destes trabalhos fez uso de uma discretização do tipo *pixel* o que acarretou, após a discretização do problema, na introdução de um grande número de variáveis de projeto, necessárias para a definição do leiaute ótimo com uma resolução aceitável.

Dentre os métodos de otimização de leiaute que consideram malhas variáveis durante o processo estão os métodos de otimização estrutural evolutiva, conhecidos na literatura como (ESO), do original em inglês *Evolutionary Structural Optimization*. A idéia principal destes métodos consiste: na proposição de um critério

eficiente, capaz de estimar a contribuição de cada elemento na resposta do sistema; e na estratégia de remoção dos elementos que possuem a menor sensibilidade, ver Christie *et al.* (1998), Chu *et al.* (1997), Hinton & Sienz (1995), Li *et al.* (1999), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000), Reynolds *et al.* (1999) e Xie & Steven (1996). O método é influenciado pela taxa de remoção de elementos e isto tem como desvantagens: a ocorrência de extremidades dentadas e de interconexões estruturais, dando origem a mecanismos e à concentração de tensão. Uma melhoria do método foi proposta, na qual a estrutura evolui de uma estrutura básica, que representa o leiaute estrutural mínimo necessário para resistir às cargas aplicadas, desconsiderando a magnitude da tensão efetiva. O Material é então acrescentado nas regiões de alta concentração de tensão de modo a amenizar o seu efeito. Este procedimento conduz a um leiaute ótimo final e é conhecido como o ESO aditivo, i.e., AESO do original em inglês *Additive Evolutionary Structural Optimization*, ver Querin *et al.* (2000a). Uma variação do método, que combina o básico método ESO com o AESO, denominado por bidirecional ESO ou BESO, do original em inglês *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*, foi proposto por Querin *et al.* (2000b). Neste método o material pode ser acrescentado ou removido. A utilização de uma taxa evolucionária de adição e outra de remoção de material, de maneira sucessiva, mostrou não ser simples, pois as seleções destas taxas influenciam na determinação do leiaute ótimo e não possuem uma forma efetiva, respaldada por modelos matemáticos, de serem determinadas.

Nos trabalhos de Christie *et al.* (1998) e Reynolds *et al.* (1999) é utilizado um método adaptativo reverso. O método considera, para cada iteração evolucionária, o seguinte processo: um contorno de tensão é obtido na estrutura atual. Esta curva de nível é então utilizada como um molde para a estrutura modificada. Uma nova malha é obtida no domínio definido pela curva de nível a qual é utilizada no novo processo iterativo. A dificuldade desta abordagem é na determinação de um modo automático para a identificação do contorno adequado, para gerar a nova malha no interior da região selecionada. Outra desvantagem do método é a sua não fundamentação matemática como sendo a solução de um problema de otimização.

Existem ainda alguns métodos que combinam as técnicas de refino de malha com processos de otimização de leiaute, ver Ramm *et al.* (1998), Alves & Alves (1999), Costa Jr. & Alves (2003). No trabalho de Ramm *et al.* (1998) é realizada uma seqüência de otimização de leiaute seguido por um processo de remalhamento. O

remalhamento é realizado a cada vez que as regiões vazias são determinadas e seus contornos são aproximados por *splines*. Daí, na região do domínio que contém material, uma malha mais refinada é gerada.

### 1.3 Objetivos e conteúdo do trabalho

Este trabalho tem como objetivo aperfeiçoar os resultados de um conjunto de problemas de otimização de leiaute estrutural, propiciando uma melhor definição do contorno material/vazio que os métodos existentes. Para que isso seja possível o trabalho contribui com algumas estratégias de refino *h*-adaptativo, desenvolvidas e implementadas no contexto do Método dos Elementos Finitos de Galerkin.

Todos os capítulos a seguir foram escritos de modo a serem praticamente auto-suficientes no seu entendimento, ou seja, cada capítulo contém uma introdução, o desenvolvimento teórico, a formulação do problema discretizado, a descrição dos algoritmos implementados, os resultados de algumas aplicações e as conclusões do processo proposto. Desta forma, efetua-se então uma concisa apresentação de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 2 é proposto um método que combina um método de otimização do leiaute, cujo objetivo é a minimização da flexibilidade<sup>2</sup> de estruturas bidimensionais, com um esquema de refino do tipo *h*-adaptativo, utilizado classicamente, no contexto do método dos elementos finitos. Na discretização é utilizado o elemento Tri6 Lagrangiano. No esquema de refino *h*-adaptativo são refinados todos os elementos materiais e todos os elementos vazios que possuem pelo menos um nó pertencente ao contorno material. O processo de refino é acompanhado de um estimador de erro cujo objetivo é a redução do erro relativo da solução. O modelo proposto mostrou ser bastante robusto na obtenção dos resultados da topologia ótima, i.e., proporcionou uma boa resolução e definição do contorno e da topologia em todos os casos testados. A desvantagem dessa abordagem é a relativa dependência da malha inicial no resultado da topologia ótima.

No Capítulo 3 é implementado o mesmo processo proposto de otimização de leiaute combinado com o esquema de refino *h*-adaptativo, que é proposto no Capítulo

---

<sup>2</sup> O termo flexibilidade, utilizado no texto, refere-se ao trabalho de deformação elástica do corpo quando submetido aos esforços externos.

2, ainda sob formulação de flexibilidade mínima. Neste caso, porém, o processo é aplicado a estruturas do tipo placas espessas. Os resultados obtidos proporcionaram uma alta qualidade na definição da topologia ótima. Entretanto, como no Capítulo 2, a abordagem também apresenta a desvantagem da dependência da solução com a malha inicial.

No Capítulo 4 é proposto um método que combina a otimização do leiaute sob formulação de flexibilidade mínima em estruturas bidimensionais, com um esquema de refino do tipo  $h$ -adaptativo. Este processo utiliza um elemento finito Tri3 Lagrangiano, proporcionando um grande desempenho na obtenção de topologias com alta qualidade da resolução, devido ao baixo custo computacional. Para contornar os problemas de instabilidade de solução (problemas de tabuleiro ou xadrez), adiciona-se um conjunto de restrições de caixa às derivadas parciais do campo de densidade relativa. Estas restrições de caixa reduzem, a cada etapa de refino, a dependência da solução ótima com relação à malha inicial. Esta formulação proporciona resultados de alta qualidade na definição das topologias ótimas. Porém, apresenta ainda uma leve dependência dos resultados com a malha inicial. O procedimento proposto apresenta-se como uma ferramenta bastante promissora, quanto à intenção de se obter leiautes estruturais ótimos, bem definidos e com um número reduzido de membros estruturais.

No Capítulo 5, o mesmo processo de refino  $h$ -adaptativo proposto no Capítulo 4 é agora aplicado em modelos de placas semi-espessas, utilizando o clássico campo cinemático proposto por Mindlin-Reissner. Neste processo é também utilizado um elemento finito do tipo Tri3 Lagrangiano, proporcionando um grande desempenho na obtenção de topologias com alta qualidade da resolução, devido ao baixo custo computacional. Para contornar os problemas de instabilidade de solução (problemas de tabuleiro), adiciona-se um conjunto de restrições de caixa às derivadas parciais locais do campo de densidades relativas. Com o objetivo de contornar o fenômeno de travamento sob cisalhamento, é utilizado o método DSG, do original no inglês *discret shear gap*, proposto por Bletzinger *et al.* (2000). Esta formulação assim como para o caso bidimensional, proporciona resultados de alta qualidade na definição das topologias ótimas.

O Capítulo 6 também utiliza a mesma estratégia de refino  $h$ -adaptativo proposta no Capítulo 4, mas a formulação é aplicada a estruturas bidimensionais para a minimização da massa e sob restrição de tensão. Este processo também utiliza um elemento finito Tri3 Lagrangiano, proporcionando um grande desempenho na

obtenção de topologias com alta qualidade da resolução, devido ao baixo custo computacional. Para contornar os problemas de instabilidade de solução (problemas de tabuleiro), considera-se a introdução das restrições de caixa. Nesta formulação é proposta uma restrição de tensão efetiva, que utiliza um critério integral (critério médio global), relaxando a condição pontual (critério local) e assim possibilitando trabalhar com restrições paramétricas de modo eficiente. Esta formulação gera leiautes ótimos com alta qualidade de definição. É importante salientar que, a utilização de um critério de tensão global combinado com a estratégia de refino  $h$ -adaptativo proporciona leiautes ótimos que violam, em menos de 2%, o critério local de tensão.

## Capítulo 2

# Estruturas 2D sob Minimização da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri6

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um processo combinando a otimização de leiaute com uma estratégia de refino  $h$ -adaptativo, tendo como objetivo fornecer uma melhor definição do contorno do leiaute ótimo da estrutura. O processo consiste na solução de uma seqüência de otimização de leiaute, intercalada pela aplicação de uma estratégia de refino da malha, como ilustrado nas Figs. 2.8(a-e) e 2.9(a-e). A malha, de elementos finitos, considerada em cada problema de otimização de leiaute é obtida a partir da discretização anterior pela aplicação do processo  $h$ -adaptativo. Este trabalho considera que o número total de refinamentos a ser aplicado no processo seja previamente definido, ainda que um critério de convergência global possa ser empregado para a completa automatização do processo. De acordo com os testes realizados, tem-se verificado que uma seqüência de três a quatro etapas de otimização de leiaute, seguidas por um passo de refino  $h$ -adaptativo, é suficiente para a determinação de uma solução aceitável, a partir de uma malha refinada inicial. Verifica-se ainda que, o tamanho do problema aumenta muito rapidamente e o relativo ganho na qualidade da otimização do leiaute, com relação à solução anterior, diminui consideravelmente depois do terceiro problema de leiaute. Sendo assim, é considerado mais efetivo empregar um número prescrito total de níveis de refino do processo de otimização.

No caso do usuário definir uma malha inicial com uma pequena quantidade de elementos, será necessária a utilização de um número maior de etapas de otimização de leiaute, seguido de refino. Entretanto, após a definição da malha inicial, é possível estimar o tamanho aproximado do menor elemento para cada um dos estágios de refino da malha. Esta possibilidade se deve à estratégia de refino, pois cada elemento é dividido em quatro novos elementos, como pode ser visto nas Figs. 2.4(a,b). Note que, o tamanho da aresta do elemento triangular refinado corresponde à metade do



tamanho da aresta do elemento inicial. Sendo assim, é fácil verificar que o tamanho dos elementos triangulares, submetidos a todos os estágios de refino, define a resolução do contorno do leiaute ótimo da estrutura. Desta forma, uma vez especificada a resolução do leiaute final, pode-se utilizar o critério de tamanho do elemento, para a determinação do número total de otimizações de leiaute e refinamentos  $h$ -adaptativos, a serem aplicados na malha inicial do problema.

O método de otimização de leiaute utilizado é baseado na abordagem material, ver Bendsoe & Kikuchi (1998), Bendsoe *et al.* (1993), Bendsoe & Rodrigues (1991), Bendsoe (1995), Bendsoe & Sigmund (1999) e Kikuchi & Suzuki (1992). O modelo da microestrutura usado aqui foi proposto por Gea (1996), o qual consiste de microvazios esféricos inseridos numa estrutura de material sólido. A equação constitutiva 3D homogeneizada, associada à microestrutura, é descrita por uma expressão analítica simples, a qual depende apenas da densidade relativa do material.

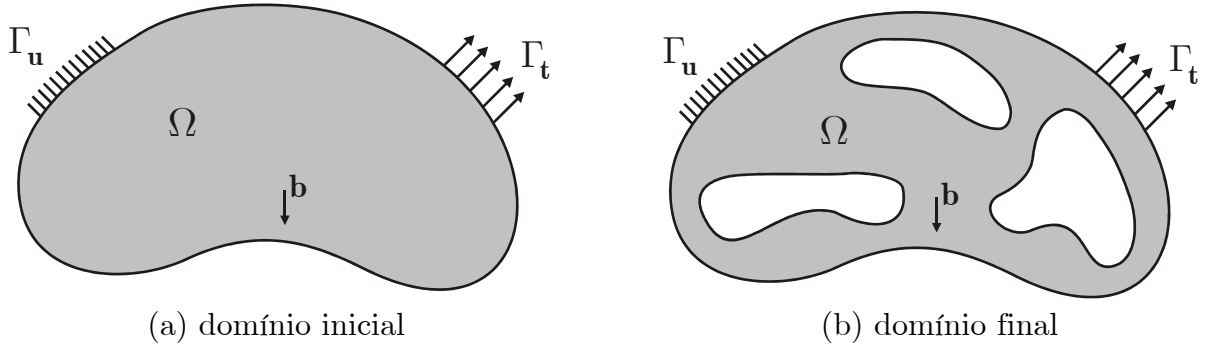


Figura 2.1: Caracterização do problema de otimização de leiaute.

O problema de otimização tem como objetivo minimizar a flexibilidade (ou maximizar a rigidez) de estruturas bidimensionais sob uma restrição de volume e restrições laterais nas variáveis de projeto. Um problema típico de otimização de leiaute está ilustrado nas Figs. 2.1(a,b), onde se considera que:

- $\Gamma_u$  - é a parte do contorno com deslocamento prescrito, i.e.,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;
- $\Gamma_t$  - é a parte do contorno com tração prescrita, i.e.,  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ ;
- $\Omega$  - é o domínio do corpo com  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ;
- $\mathbf{b}$  - é a força de corpo.

Adicionalmente, define-se  $H(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  como o conjunto dos deslocamentos admissíveis e  $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  como sendo o conjunto das variações admissíveis.

## 2.2 Formulação do problema

### 2.2.1 Definição do problema

O problema de otimização de leiaute pode ser formulado da seguinte forma:

Determinar a densidade relativa  $\rho(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$ , tal que seja solução de

$$\min_{\rho} l(\mathbf{u}), \quad (2.1)$$

sujeita às seguintes restrições:

(i) Restrição de volume efetivo

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega, \quad (2.2)$$

sendo que  $\Omega$  é o volume do corpo,  $\rho$  é a densidade relativa e  $\alpha$  representa a fração de volume prescrito do corpo, i.e.,  $\alpha \in (0,1)$ ;

(ii) Restrições laterais

$$0 < \rho_{\inf} \leq \rho \leq \rho_{\sup}, \quad (2.3)$$

sendo aqui considerado que  $\rho_{\inf} = 0,001$  e  $\rho_{\sup} = 1,0$ .

O campo de deslocamento é obtido através da solução do problema de valor de contorno: Encontrar  $\mathbf{u} \in H$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_o, \quad (2.4)$$

no qual

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.5)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (2.6)$$

Aqui,  $\mathbf{D}^H(\rho)$  é a equação constitutiva homogeneizada do material com uma microestrutura porosa, ver Gea (1996).

### 2.2.2 Descrição do modelo numérico

A equação de estado do problema é modelada pelo Método dos Elementos Finitos de Galerkin. O modelo considera constante o campo de densidades relativas  $\rho(\mathbf{x})$  interno ao elemento. Desta forma, as variáveis de projeto são definidas como sendo as densidades relativas dos elementos. O elemento finito utilizado é do tipo triangular não isoparamétrico de ordem superior, o clássico Tri6, que considera uma interpolação linear para a geometria, i.e., arestas retilíneas, e uma interpolação quadrática para o campo de deslocamento. A utilização deste elemento simplifica a implementação do esquema  $h$ -adaptativo (ver George & Borouchaki (1997) e Carey (1997)) e evita os problemas de instabilidade da solução, caracterizados por uma configuração final que se assemelha com um tabuleiro de damas. Para maiores observações verificar Sigmund & Petersson (1998).

Este elemento tem-se mostrado robusto, evitando o problema de tabuleiro, reduzindo o aumento do tempo de processamento numérico, quando comparado com outros elementos finitos de ordem superior, e facilita consideravelmente a implementação do processo de refino  $h$ -adaptativo.

O modelo discreto do problema de otimização de leiaute estrutural pode ser formulado como: Determinar  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{n_e}$ , solução de

$$\min f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) \quad (2.7)$$

sujeito à restrição

$$g(\boldsymbol{\rho}) \leq 0, \quad \forall \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Aqui é definido que

$$f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) = \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) d\Omega + \sum_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) d\Gamma, \quad (2.9)$$

$$g(\boldsymbol{\rho}) = \sum_e \rho_e \Omega_e - \alpha \Omega \quad (2.10)$$

e ainda que

$$\mathbf{X} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{n_e} \mid \rho_e^{\inf} \leq \rho_e \leq \rho_e^{\sup}, \quad e = 1, \dots, n_e \right\}, \quad (2.11)$$

onde  $n_e$  denota o número de elementos da malha e  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$  é a solução discreta da eq. (2.4).

Para a solução do problema discreto de otimização, é aplicado o Método do Lagrangiano Aumentado. Como consequência, o problema de otimização reduz-se à solução de uma seqüência de problemas de limites laterais do tipo caixa, o qual é resolvido por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de quase-Newton sem memória (ver apêndice A).

## 2.3 Modelo da microestrutura

O modelo constitutivo da microestrutura considerada na modelagem numérica foi proposto por Gea (1996), ver também Chickermane & Gea (1997). Este modelo microestrutural é caracterizado por um material poroso, o qual, é constituído de microvazios esféricos inseridos numa matriz de material sólido, ver ilustração na Fig. 2.2. A equação constitutiva homogeneizada tridimensional é representada por uma expressão analítica simples, a qual é função apenas da densidade relativa do material. Considerando que o coeficiente de Poisson do material completamente denso é  $\nu_o = \frac{1}{3}$ , e definindo  $E_o$  e  $G_o$  como sendo respectivamente, o módulo de Young e o módulo de cisalhamento do material completamente denso, obtém-se:

$$E(\rho) = \frac{\rho E_o}{(2 - \rho)} \quad (2.12)$$

e

$$G(\rho) = \frac{8 \rho G_o}{(15 - 7\rho)} \quad , \quad (2.13)$$

com  $\rho$  representando a densidade relativa do material,  $\rho \in [\rho^{\text{inf}}, \rho^{\text{sup}}]$ .

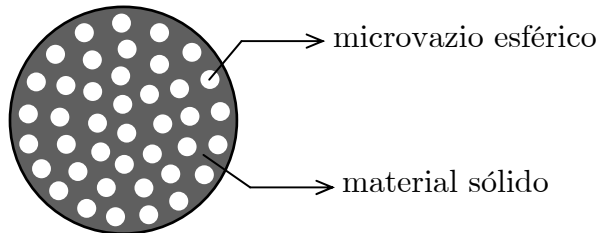


Figura 2.2: Modelo de microestrutura porosa, proposto por Gea (1996).

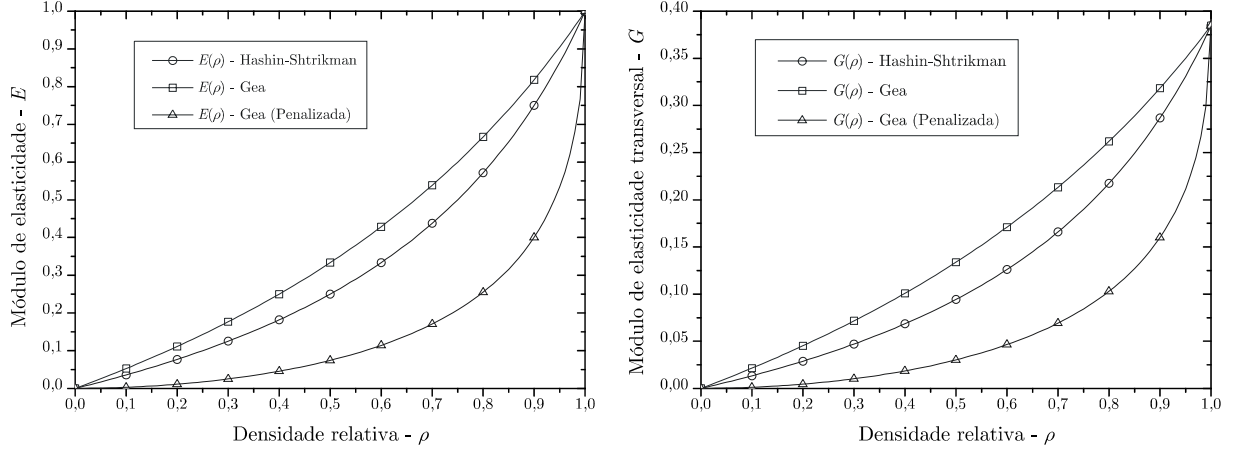


Figura 2.3: Propriedades efetivas do material.

Para aumentar a taxa de convergência é utilizada uma equação constitutiva penalizada, ver Kikuchi *et al.* (1995). A equação é obtida considerando a composição das eqs. (2.12) e (2.13) com um mapeamento não linear  $\varpi : \rho \rightarrow \varpi(\rho)$ . Como resultado, obtêm-se:

$$\tilde{E}(\rho) = \frac{\varpi(\rho) E_0}{(2 - \varpi(\rho))} \quad (2.14)$$

e

$$\tilde{G}(\rho) = \frac{8\varpi(\rho) G_0}{(15 - 7\varpi(\rho))} \quad (2.15)$$

que denotam respectivamente o módulo de Young e o módulo de cisalhamento penalizados. O mapeamento  $\varpi(\rho)$  é dado por:

$$\varpi(\rho) = 1 + \varsigma - \sqrt{1 + 2\varsigma + 2\varsigma^2 - (\rho + \varsigma)^2}, \quad \varsigma > 0. \quad (2.16)$$

Na formulação é utilizado  $\varsigma = 0,01$ . Assim, as propriedades efetivas do material são penalizadas de modo a satisfazer os limites laterais de Hashin-Shtrikman, como ilustrado na Fig. 2.3, ver Bendsoe & Sigmund (1999). Como resultado, o modelo penalizado admite uma possível realização física para cada uma das densidades intermediárias, i.e., para todo leiaute ótimo existe uma configuração física realizável. A desvantagem é que a penalização modifica completamente o modelo proposto por Gea (1996).

## 2.4 Refino da malha com adaptatividade $h$

### 2.4.1 Descrição geral do método

O objetivo aqui é descrever o processo proposto que combina a otimização de leiaute com uma estratégia de refino  $h$ -adaptativo, utilizada no Método dos Elementos Finitos. As principais vantagens do processo são:

- maior definição do contorno material;
- redução do número de variáveis de projeto;
- diminuição do erro da solução da equação de estado.

No processo proposto, o número total de níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos a serem aplicados é definido de modo prescrito. Em cada nível de refino, um problema de otimização de leiaute é resolvido. Logo que o leiaute ótimo é determinado, um processo de refino  $h$ -adaptativo é aplicado de modo a gerar uma nova malha, a qual será utilizada pelo próximo problema de otimização de leiaute. Desta forma, a determinação do leiaute ótimo consiste na solução de uma seqüência de problemas, onde cada um consiste na otimização do leiaute seguido por um esquema de refino  $h$ -adaptativo, como ilustrado nas Figs. 2.8(a-c) e 2.9(a-c). Uma descrição geral do algoritmo é dada a seguir.

1. Ler os dados da malha de elementos finitos e gerar a estrutura de dados inicial.
2. Ler o valor inicial das variáveis de projeto.
3. Para cada nível de refino, fazer:
  - 3.1. Resolver o problema de otimização de leiaute.
  - 3.2. Aplicar o processo de refino  $h$ -adaptativo à malha:
    - 3.2.1. Ler a estrutura de dados da malha.
    - 3.2.2. Efetuar o refino  $h$ -adaptativo da malha:
      - 3.2.2.1. Identificar o conjunto dos elementos a serem refinados.
      - 3.2.2.2. Efetuar o refino destes elementos e introduzir os elementos de transição necessários para assegurar a compatibilidade da malha.

3.2.2.3. Aplicar o processo de suavização Laplaciano condicional para melhorar a qualidade da malha.

3.2.3. Otimizar a incidência nodal do elemento de acordo com o esquema de armazenamento do algoritmo de solução do sistema linear utilizado.

3.2.4. Atualizar a malha e a estrutura de dados dos elementos finitos.

## 2.4.2 Estratégia de refino da malha

O objetivo aqui é descrever o processo de identificação do conjunto de elementos a serem refinados (passo 3.2.2.1), assim como, o processo de refino e a introdução dos elementos de transição (passo 3.2.2.2). Para facilitar a descrição do processo, são apresentadas as seguintes definições:

- **Elemento Material:** um dado elemento é definido como sendo material se a sua densidade relativa  $\rho$  é tal que  $\rho \in [0,5, \rho^{\text{sup}}]$ . Por outro lado, no caso em que  $\rho \in [\rho^{\text{inf}}, 0,5)$ , o elemento é definido como sendo vazio.
- **Contorno Material:** é definido como contorno material ou ainda perfil material, o contorno formado pelas arestas que são comuns a um elemento material e um elemento vazio.

Para auxiliar no processo de identificação do conjunto de elementos a serem refinados, definido por  $J_r$ , é introduzido um ponteiro de vetor  $Pref(e)$ ,  $e = 1, \dots, n_e$  no qual  $n_e$  representa o número total de elementos da malha. Se  $Pref(e) = 1$  então o  $e$ -ésimo elemento deverá ser refinado, i.e.,  $e \in J_r$ . Caso contrário, se  $Pref(e) = 0$  então o elemento não será refinado, o que implica  $e \notin J_r$ . Agora, com esta definição do ponteiro, para identificação de todos os elementos que pertencem ao conjunto  $J_r$ , é apresentada a seguir a estratégia de refino  $h$ -adaptativo proposta:

1. Iniciar ponteiro  $Pref(e) = 0$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ .
2. Para cada elemento,  $e = 1, \dots, n_e$ , verificar:

Se  $\rho_e \in [0,5, \rho^{\text{sup}}]$  então denotar  $Pref(e) = 1$ , assim, o elemento material pertence ao conjunto  $J_r$ , i.e., o elemento será refinado. Agora, se  $\rho_e \in [\rho^{\text{inf}}, 0,5)$  o elemento é um elemento vazio, então é verificado se o elemento tem pelo menos um nó pertencente ao contorno material. Caso afirmativo, o valor do ponteiro é redefinido de modo que  $Pref(e) = 1$ . Daí, este elemento vazio também será refinado, i.e., será um elemento do conjunto  $J_r$ .

O objetivo aqui é evitar ter um dado elemento vazio com dois ou mais vizinhos que são elementos materiais. Isto pode conduzir a geração de extremidades pontiagudas no contorno material ou pode conduzir a geração de regiões vazias no interior, proporcionando uma baixa qualidade na definição do contorno material.

3. Determinar a medida de qualidade  $Q(e)$  de cada elemento,  $e = 1, \dots, n_e$ , a qual é definida por

$$Q(e) = \frac{6A_e}{\sqrt{3} L_{\max}^e P_e} \quad (2.17)$$

onde

$A_e$  é a área do elemento triangular,

$P_e$  é a metade do perímetro do elemento triangular,

$L_{\max}^e = \max \{ \overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc} \}$  é o comprimento da maior aresta do triângulo.

Daí, se  $Q_e \leq 0,55$ , redefine-se o valor do ponteiro para  $Pref(e) = 1$ . Assim, todos os elementos distorcidos são refinados.

4. Para cada elemento,  $e = 1, \dots, n_e$ , fazer:

Determinar o erro global e o erro médio dos elementos definidos respectivamente por  $\Theta_G$  e  $\Theta_e$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ . Agora, se  $\Theta_e > (1 + \varphi)\Theta_G$ , para um dado  $\varphi > 0$ , redefine-se o valor do ponteiro para  $Pref(e) = 1$ , ou seja, o  $e$ -ésimo elemento será refinado. Aqui, é utilizado  $\varphi = 0,8$  e as medidas de erro estão definidas na subseção 2.5.

Agora, uma vez que todos os passos acima foram realizados, é obtida uma primeira estimativa do conjunto  $J_r$ . O conjunto  $J_r$  pode ser aumentado com a aplicação de um critério adicional de refino para suavização.

Note que, na estratégia de refino, descrita no passo 2, foi decidido refinar todos os *elementos-materiais* e todos os *elementos-vazios* que tem pelo menos um nó pertencente ao contorno material. Assim, o aumento das variáveis de projeto resultante deste critério não é relevante se a fração de volume prescrita é pequena. Mas para grandes frações de volume, esta decisão resulta num grande aumento das variáveis de projeto. Para evitar este problema, deve-se substituir a estratégia do passo 2, refinando apenas os elementos materiais que têm no mínimo uma aresta



pertencente ao contorno material. Entretanto, foi verificado que, em alguns casos, esta estratégia ocasiona regiões de *vazios* internos aos grandes elementos materiais não refinados, proporcionando nestas regiões uma definição do contorno material de baixa qualidade. Devido a grande maioria dos problemas práticos prescrever pequenas frações de volume, a decisão de refinar todos os elementos materiais foi implementada.

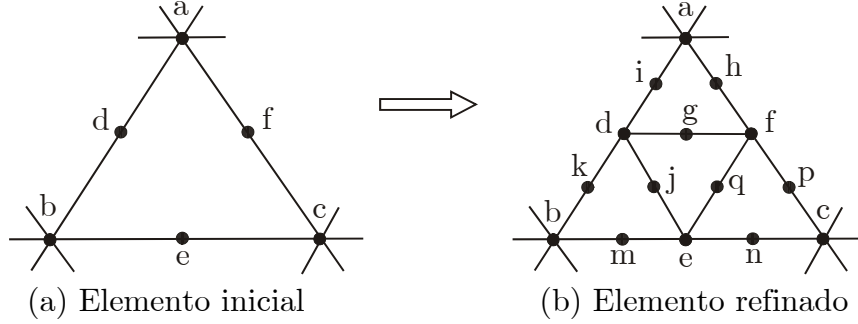


Figura 2.4: Estratégia de refino para elementos Tri6.

O esquema de refino do elemento descrito no passo 3.2.2.2, é ilustrado nas Figs. 2.4(a,b), e o esquema para a introdução dos elementos de transição, está ilustrado nas Figs. 2.5(a,b).

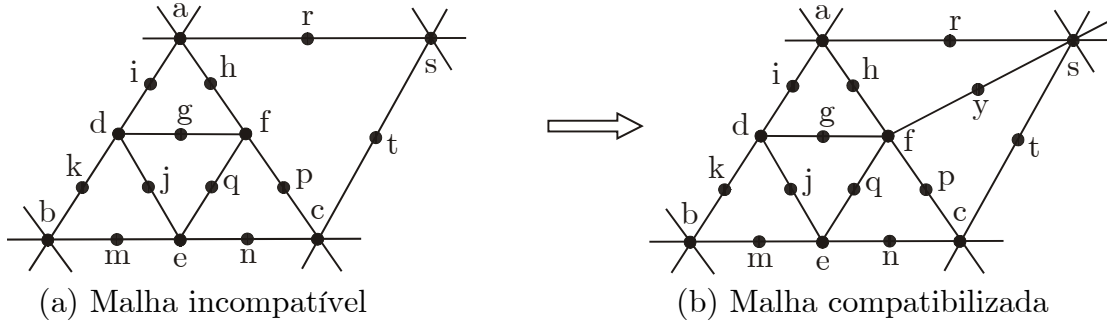


Figura 2.5: Elemento de transição compatibiliza a malha (caso Tri6).

### 2.4.3 Processo de suavização Laplaciano condicional

Para melhorar a qualidade da malha, depois do passo de refino, é empregado um processo de suavização denominado por Laplaciano condicional, o qual é descrito pelas Figs. 2.6(a,b), sendo que  $n_v$  denota o número de nós dos vértices adjacentes associado com o nó  $\mathbf{x}_n$ . O processo de suavização é aplicado, em ordem crescente, a todos os nós dos vértices que estão no interior da malha.

Observe que os nós do contorno são mantidos fixos. O processo Laplaciano é condicional, portanto, ele somente será aplicado se a qualidade da malha do conjunto

de elementos melhorar. A qualidade de um conjunto de elementos é definida como sendo a qualidade do pior elemento do conjunto. A medida da qualidade do elemento é dada pela eq. (2.17). Ao aplicar o processo de suavização Laplaciano, uma nova posição *teste* do nó  $\mathbf{x}_n$  é determinada, a qual é denotada por  $\bar{\mathbf{x}}_n$ , entretanto, o nó  $\mathbf{x}_n$  só será movido para a nova posição *teste* se a qualidade da malha não diminuir.

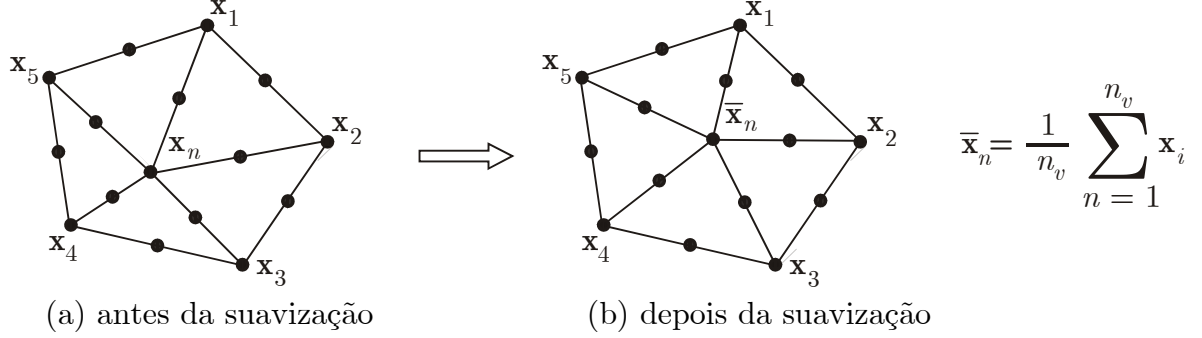


Figura 2.6: Processo de suavização Laplaciano em elementos Tri6.

## 2.5 Estimador de erro e critério de refino

Aqui, por simplicidade, emprega-se um estimador de erro baseado nos trabalhos de Zienkiewics & Zhu (1990 e 1991). Note que a equação constitutiva depende da densidade relativa do material, que é constante dentro de cada elemento, mas descontínua entre elementos diferentes. Como resultado, é obtido um campo descontínuo de tensão. Assim, para aplicar a abordagem de Zienkiewics & Zhu (1990) faz-se uso do campo de deformações. Conseqüentemente, o método modificado utiliza-se da técnica de recuperação do gradiente para estimar o erro do problema já na forma discreta, i.e., agora em termos do campo de deformação, por meio da norma da energia.

Supondo ser  $\boldsymbol{\rho}$  uma distribuição realizável da densidade relativa do material, o erro local de deslocamento pode ser definido como:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \quad (2.18)$$

no qual,  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$  é a solução exata e  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})$  é a solução aproximada do problema. Sendo assim, a norma da energia pode ser escrita como:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (2.19)$$

O erro local de deformação pode ser escrito em termos do erro local de deslocamento do seguinte modo:

$$\mathbf{e}_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})) \quad (2.20)$$

e a norma da energia pode ser escrita da seguinte forma:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})](\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (2.21)$$

Como a distribuição exata da deformação não é conhecida, aproxima-se  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho})$  por uma solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$ , a qual é mais refinada que  $\boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})$ . Assim, o indicador de erro é aproximado por:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})](\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (2.22)$$

### 2.5.1 Determinação de $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$

A solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$ , é determinada com a aplicação da técnica de projeção proposta nos trabalhos de Zienkiewics & Zhu (1990 e 1991), mas agora baseada no fato de que a solução de elemento finito  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \in C^0(\Omega)$  e que o campo de deformações resultante é apenas contínuo por partes. Assim,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  é determinada pela resolução por mínimos quadrados do potencial  $\psi(\boldsymbol{\rho})$ , dado por

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})\|^2 d\Omega. \quad (2.23)$$

Aqui, a solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  é interpolada dentro de cada elemento como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \sum_{j=1}^{n_d} N_j \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^* \quad (2.24)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^*$  representa o vetor das componentes de deformação, avaliado no  $j$ -ésimo nó do elemento,  $n_d$  denota o número de nós do elemento e  $N_j$  a função interpolação clássica do elemento finito considerado.

Agora, uma vez que a solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  é determinada, pode-se calcular o erro médio global  $\Theta_G$ , como:

$$\Theta_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega \quad (2.25)$$

e o erro médio do elemento  $\Theta_e$ , da seguinte forma:

$$\Theta_e = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega_e. \quad (2.26)$$

A estratégia adotada para verificar se um dado elemento deveria ser ou não refinado, devido ao critério de medida de erro, é dada por: se  $\Theta_e > (1 + \varphi)\Theta_G$ , com  $\varphi = 0,8$ , então o elemento deve ser refinado. É importante notar que: devido ao refino de todos os elementos materiais, o critério de erro torna-se de relevância secundária, i.e., o parâmetro  $\varphi$  tem uma influência pequena. Entretanto, se for decidido que: no passo-2 deve-se refinar apenas os elementos materiais, que têm no mínimo uma aresta no contorno material, então os critérios de erro podem fazer um papel relevante no esquema de refino  $h$ -adaptativo proposto. Ainda com a implementação do critério de erro modificado, deve ser superado o problema relacionado às regiões internas de vazios, que acontece nos elementos grandes que não foram refinados, responsáveis por uma definição do contorno material de baixa qualidade.

## 2.6 Resultados

Com o objetivo de verificar a performance do processo proposto é considerada a solução de um conjunto de problemas. Nestes problemas são mostradas todas as topologias “ótimas” intermediárias e as respectivas malhas da sequência, que são obtidas com a aplicação do processo de refino  $h$ -adaptativo. Além disso, por simplicidade, foi considerado que as propriedades do material são as mesmas em todos os problemas, sendo estas definidas por: Módulo de Young  $E_o = 215,0$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu_o = \frac{1}{3}$ . Em todos os casos, a malha inicial é obtida com um gerador de malha padrão, no qual, emprega-se o critério de tamanho do elemento. Nestes problemas utiliza-se uma malha não estruturada, visando minimizar qualquer influência devido à orientação da malha na determinação do leiaute ótimo.

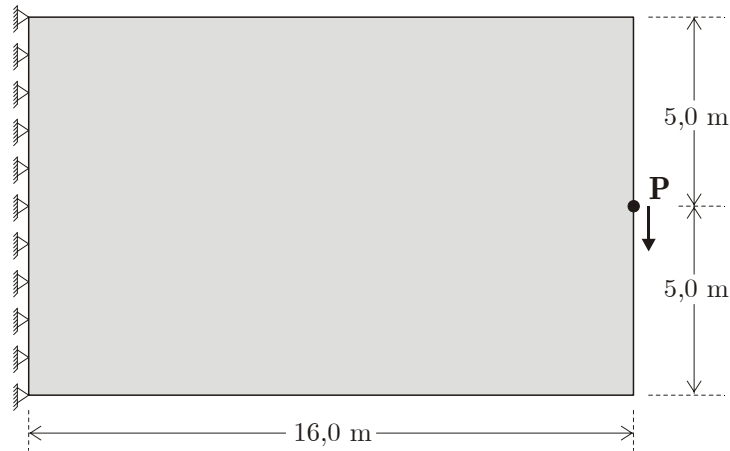
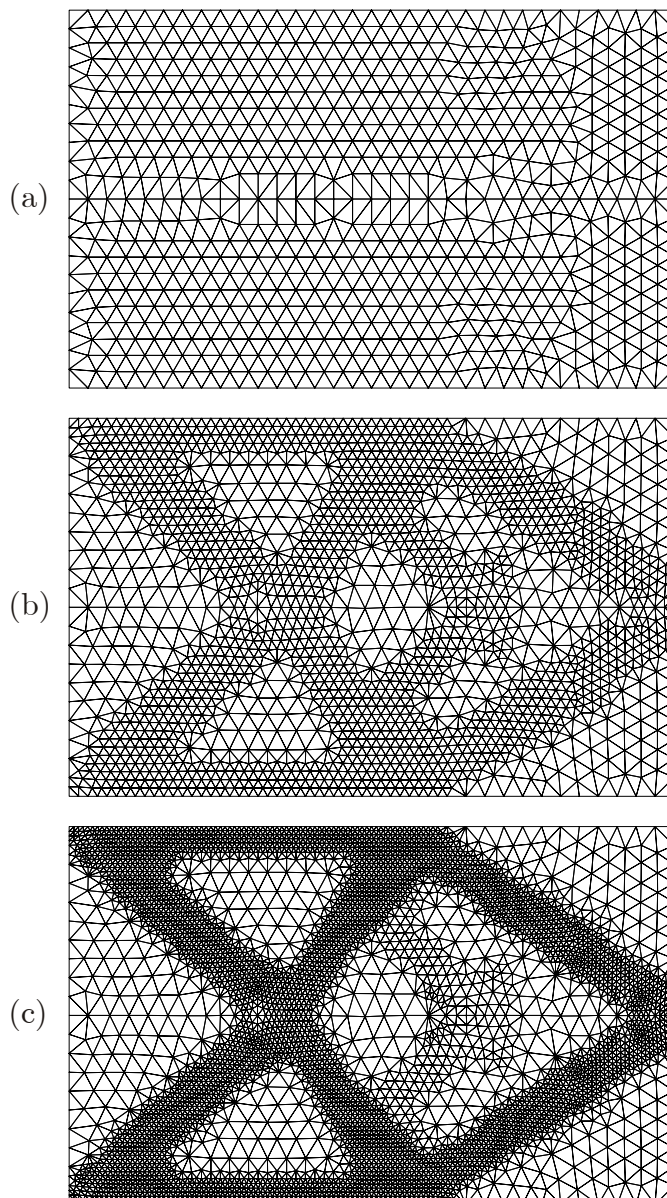
**Problema 2.1:**

Figura 2.7: Definição do Problema (2.1).

Figura 2.8: Seq. de malhas resultantes do refinamento  $h$ -adaptativo do prob. (2.1).

Determinar o leiaute ótimo de uma viga curta fixada na borda lateral esquerda, submetida a uma carga concentrada  $\mathbf{P} = 1,0 \times 10^6 \text{ N}$ , de acordo com a ilustração na Fig. 2.7. Neste exemplo é considerada uma fração de volume prescrita  $\alpha = 0,22$ .

A seqüência de malhas resultante do processo de refino  $h$ -adaptativo é mostrada nas Figs. 2.8(a) com 1384 elementos, 2.8(b) com 3588 elementos e 2.8(c) com 9724 elementos. Aqui, apenas dois níveis de refino são aplicados. A evolução dos leiautes ótimos parciais é mostrada nas Figs. 2.9(a-c).

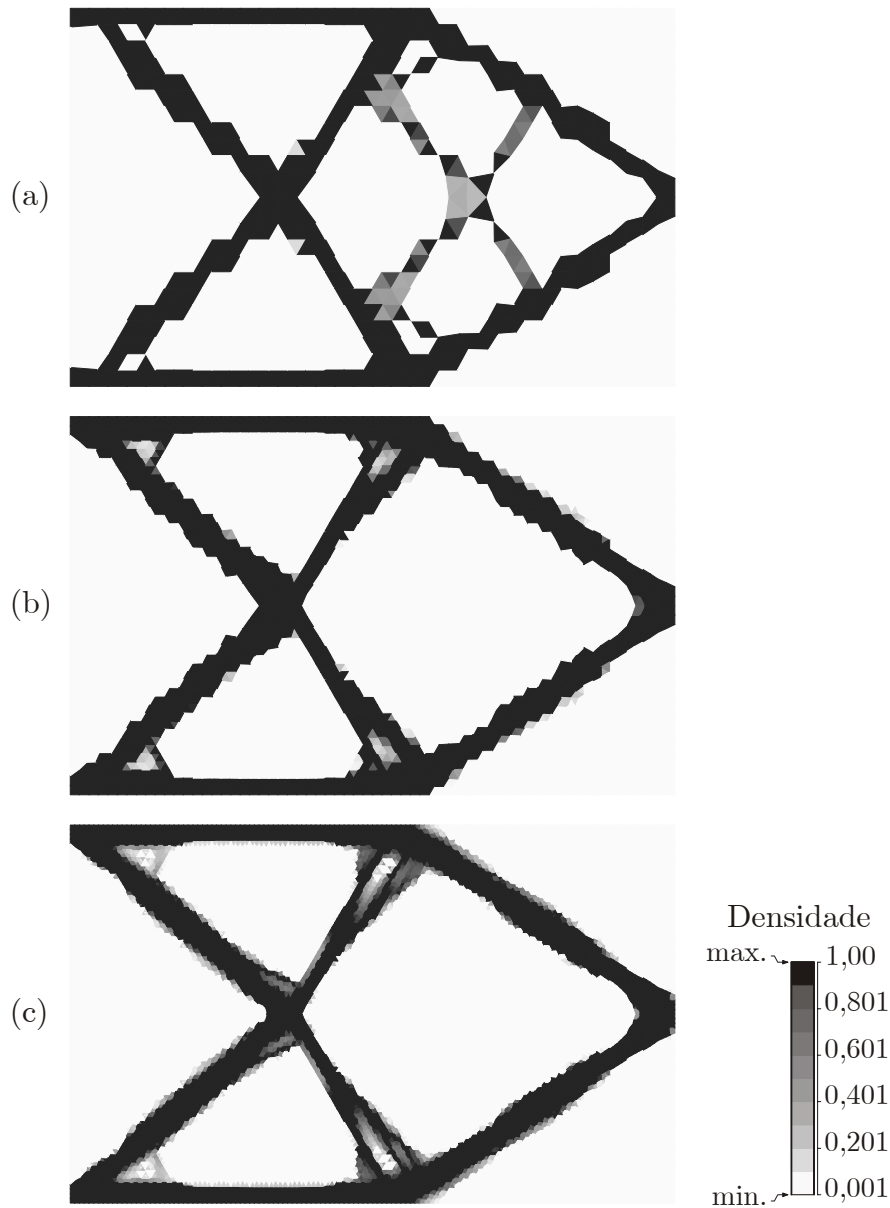


Figura 2.9: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.1).

Para verificar a dependência do leiaute ótimo com a malha inicial, é considerado o problema ilustrado na Fig. 2.10. A malha na Fig. 2.10(a), contém 6340

elementos, cujo tamanho médio dos elementos é aproximadamente o mesmo que o menor elemento da malha refinada, mostrada na Fig. 2.8(b). Agora, comparando os resultados dados nas Figs. 2.9(a) e 2.10(b), verifica-se o aparecimento de uma estrutura mais esbelta sobre a malha mais refinada, ilustrada na Fig. 2.10(a), mostrando neste caso uma relevante dependência com a malha inicial. Note também que, a estratégia de refino do tipo  $h$ -adaptativo resultou num leiaute estrutural ótimo, com um número menor de elementos estruturais, como ilustrado nas Figs. 2.9(b,c). Além disso, uma vez que a malha inicial é definida, os resultados têm indicado que a seqüência dos leiautes ótimos parciais tende a convergir, após a aplicação sucessiva do processo de refino  $h$ -adaptativo, para um leiaute ótimo final.

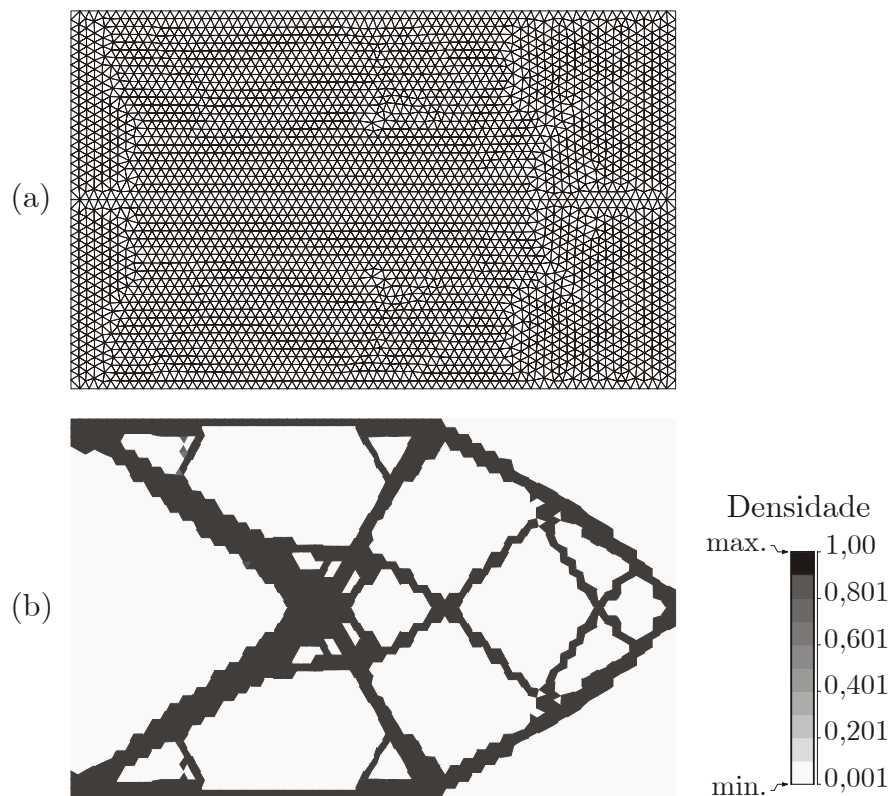


Figura 2.10: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.1) com a malha inicial.

### Problema 2.2:

Neste problema é determinado o leiaute ótimo do problema ilustrado na Fig. 2.11, no qual é aplicada uma carga prescrita  $\mathbf{P} = 100,0 \times 10^6 \text{ N}$  e prescrita uma fração de volume  $\alpha = 0,35$ . A seqüência de malhas resultantes do processo de refino  $h$ -adaptativo é mostrada nas Figs. 2.12(a) com 2832 elementos, 2.12(b) com 7022 elementos e 2.12(c) com 21172 elementos.

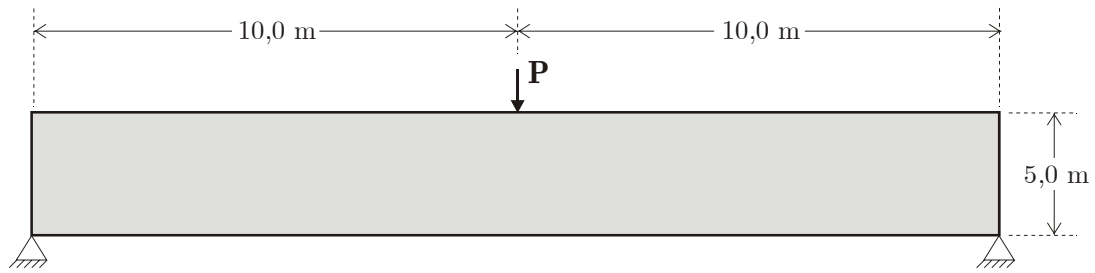


Figura 2.11: Definição do problema (2.2).

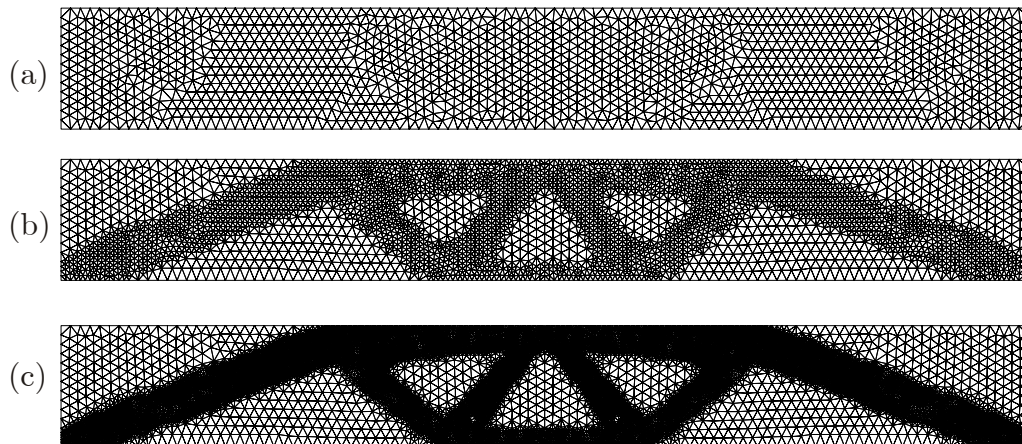
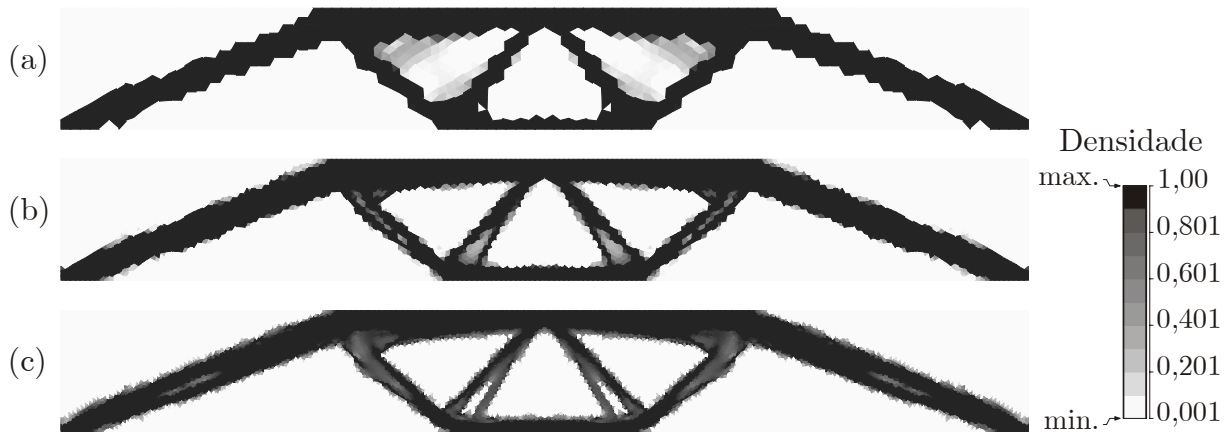
Figura 2.12: Seq. de malhas resultantes do refino  $h$ -adaptativo do prob. (2.2).

Figura 2.13: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.2).

A evolução dos leiautes ótimos parciais mostrando a melhoria da resolução do contorno material do leiaute ótimo está ilustrada nas Figs. 2.13(a-c). Note que a resolução final do contorno material é definida pelo tamanho dos menores elementos que compõem a malha refinada final.



### Problema 2.3:

Aqui, é considerado o problema ilustrado na Fig. 2.14, no qual são prescritas uma carga  $\mathbf{P} = 5,0 \times 10^6$  N e uma fração de volume  $\alpha = 0,25$ . A sequência de malhas resultantes do processo de refino  $h$ -adaptativo é mostrada nas Figs. 2.15(a) com 1264 elementos, 2.15(b) com 2874 elementos e 2.15(c) com 8042 elementos. Como no problema anterior, apenas dois níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos são aplicados.

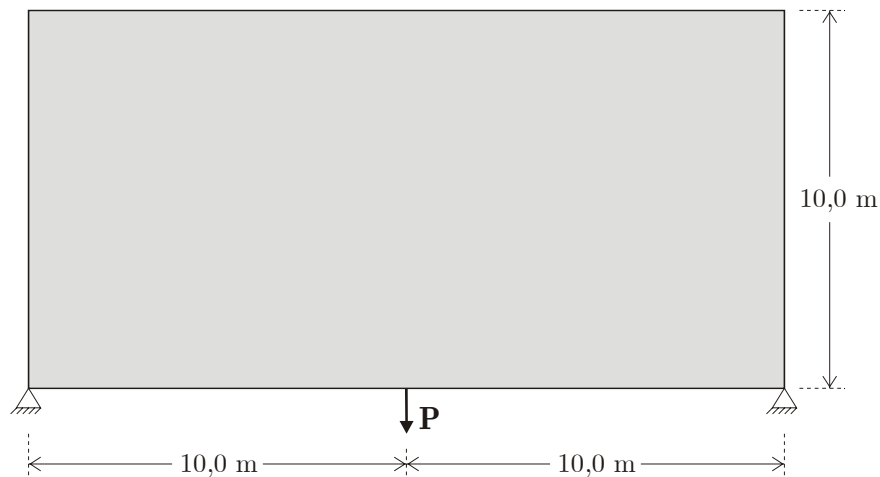


Figura 2.14: Definição do problema (2.3).

O processo de evolução mostrando os leiautes ótimos parciais obtidos, no qual pode ser verificada a melhoria da resolução do contorno material, está ilustrada nas Figs. 2.16(a-c). Aqui, a dependência da malha inicial é verificada, considerando o problema ilustrado na Fig. 2.17. A malha ilustrada na Fig. 2.17(a) contém 5800 elementos, o tamanho médio destes elementos tem aproximadamente, o mesmo tamanho dos menores elementos refinados da malha da Fig. 2.15(b). Agora, comparando os resultados dados nas Figs. 2.16(a) e 2.17(b), verifica-se a ocorrência de uma estrutura mais esbelta para um maior refino, mostrando uma pequena dependência da malha inicial. Aqui, a estratégia de refino  $h$ -adaptativo resultou num leiaute ótimo, como ilustrado na Fig. 2.16(b), cujo resultado ótimo aproxima-se do ilustrado na Fig. 2.17(b). Note que, neste caso, o refino  $h$ -adaptativo não resultou em uma dependência relevante da malha inicial.

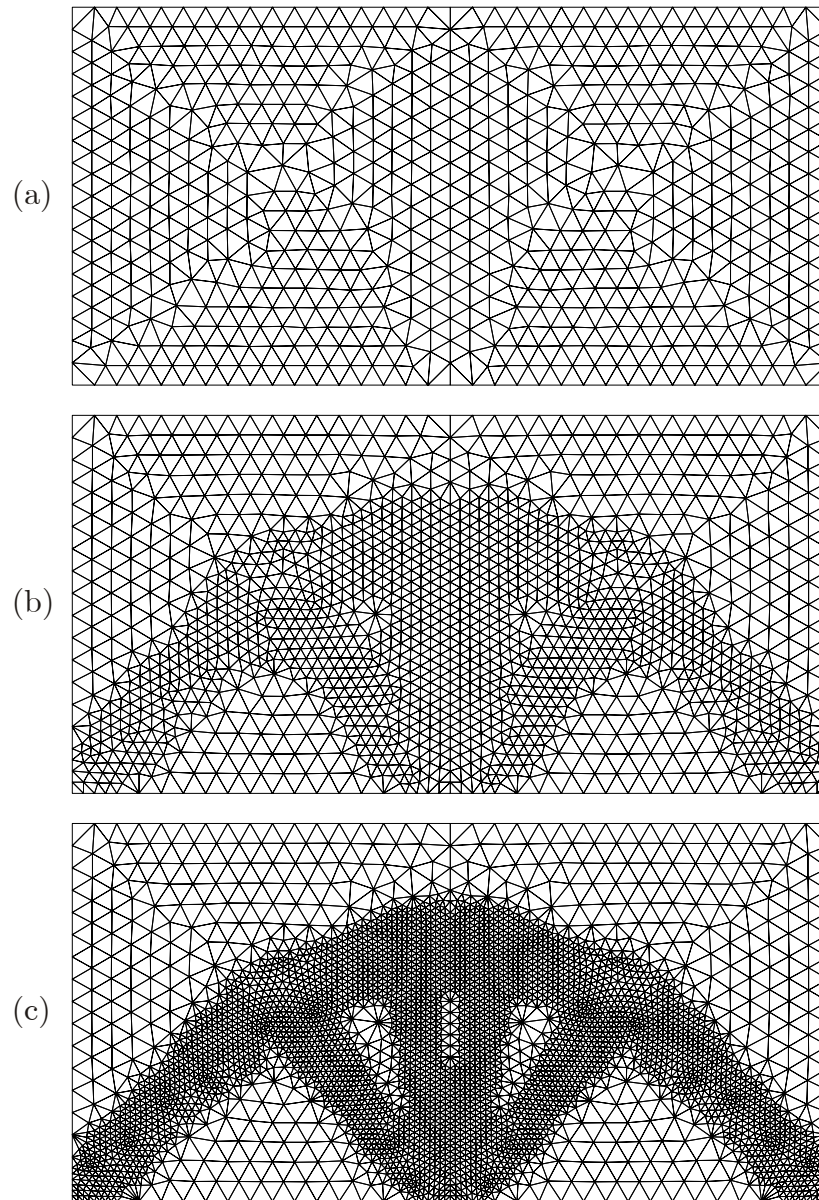


Figura 2.15: Seq. de malhas resultantes do refino  $h$ -adaptativo do prob. (2.3).

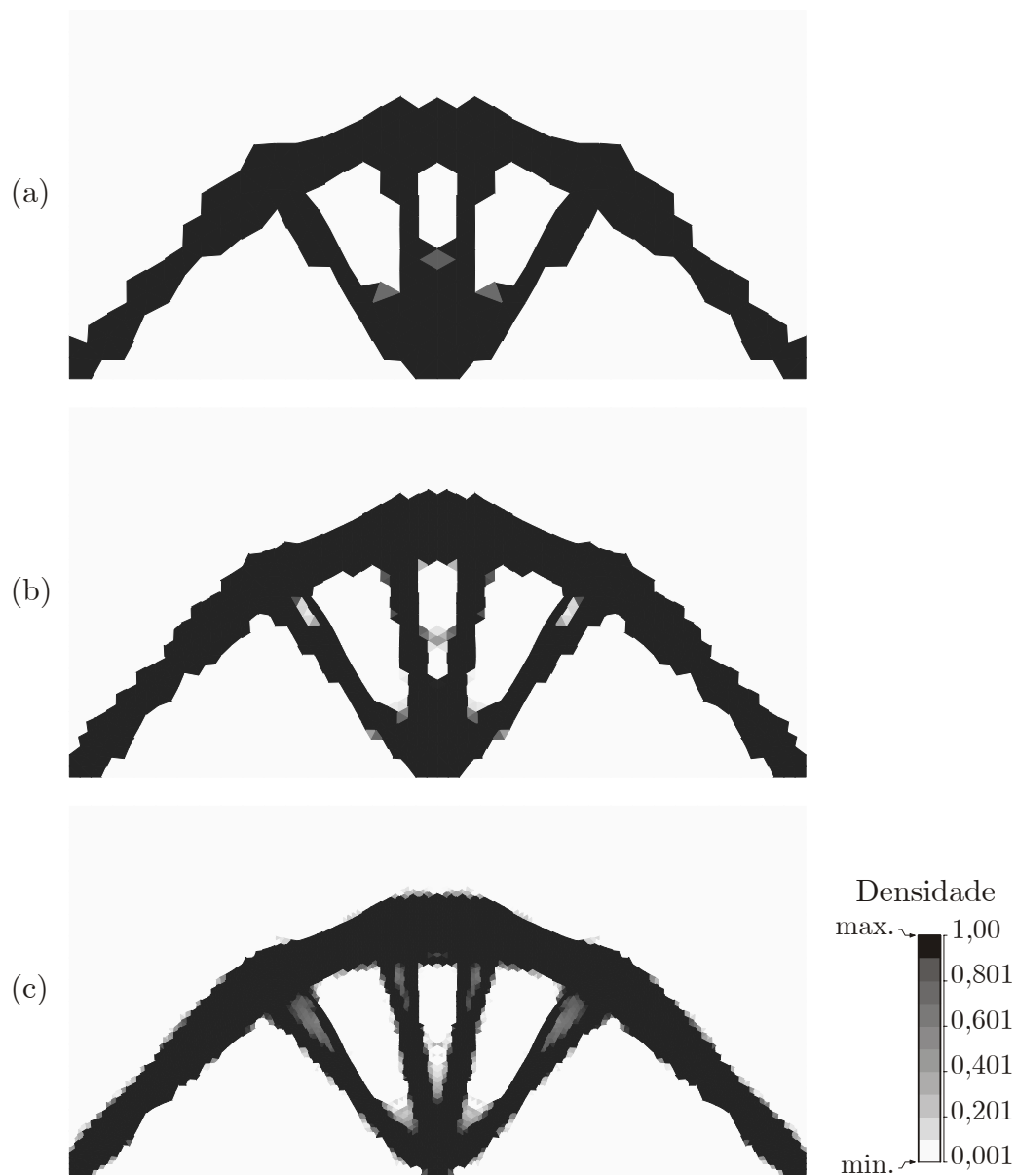


Figura 2.16: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.3).

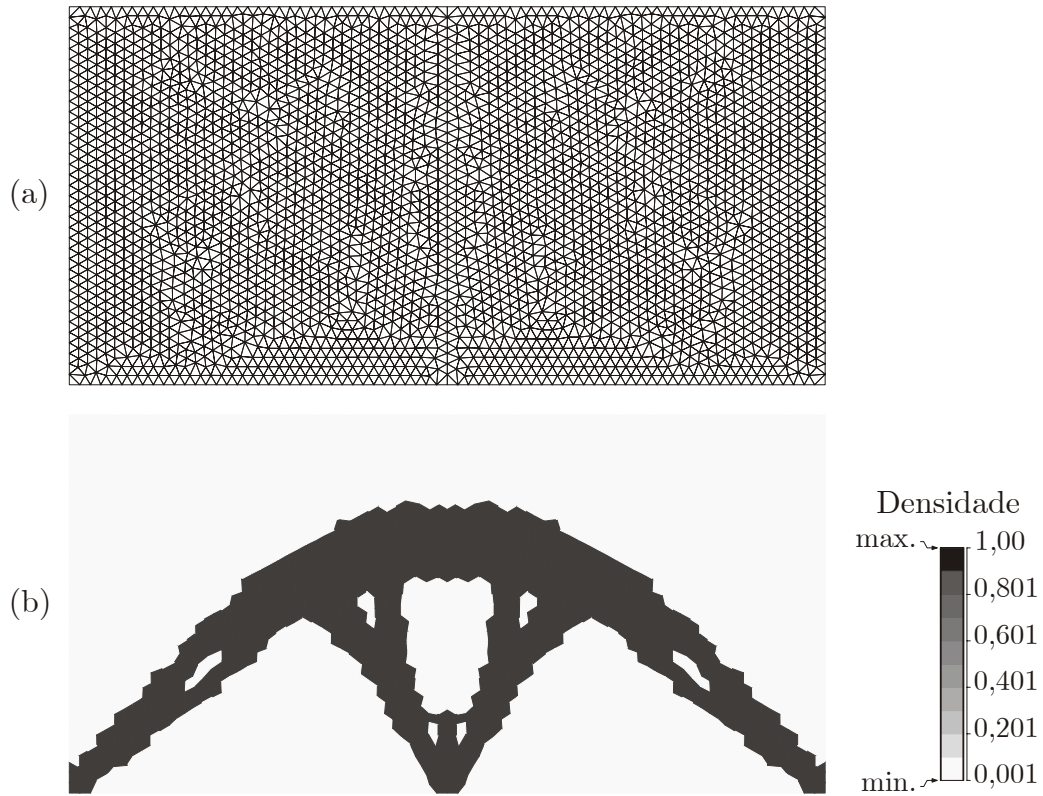


Figura 2.17: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.3) com a malha inicial.

#### Problema 2.4:

Neste caso é considerado o problema ilustrado na Fig. 2.18, no qual são prescritas uma carga  $\mathbf{P} = 10,0 \times 10^6 \text{ N}$  e uma fração de volume  $\alpha = 0,20$ . A sequência de malhas resultantes do processo de refino  $h$ -adaptativo é mostrada nas Figs. 2.19(a) com 824 elementos, 2.19(b) com 1926 elementos, 2.19(c) com 5444 elementos e 2.19(d) com 16806 elementos. Neste problema são aplicados três níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos.

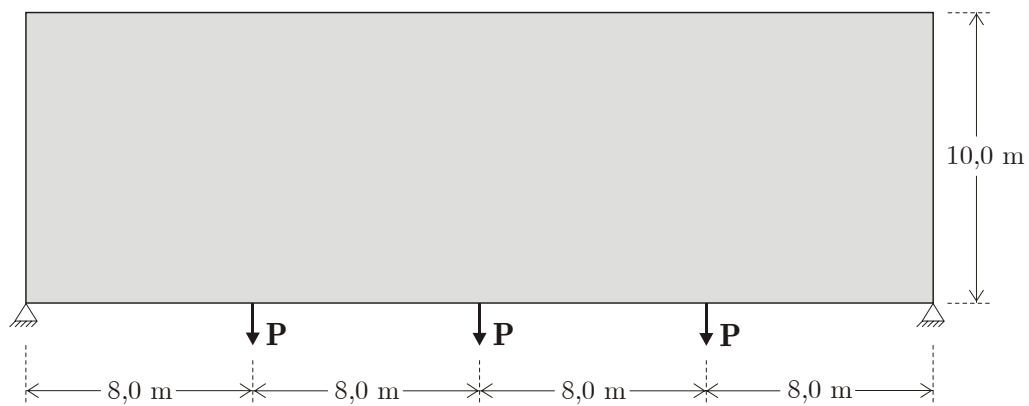


Figura 2.18: Definição do problema (2.4).

A evolução dos leiautes ótimos parciais, mostrando uma nítida resolução do contorno material, é ilustrada nas Figs. 2.20(a-d). Neste caso, assim como nos casos anteriores, pode ser visto uma significativa variação da topologia dos leiautes ótimos parciais, resultantes da seqüência das etapas de refinamentos.

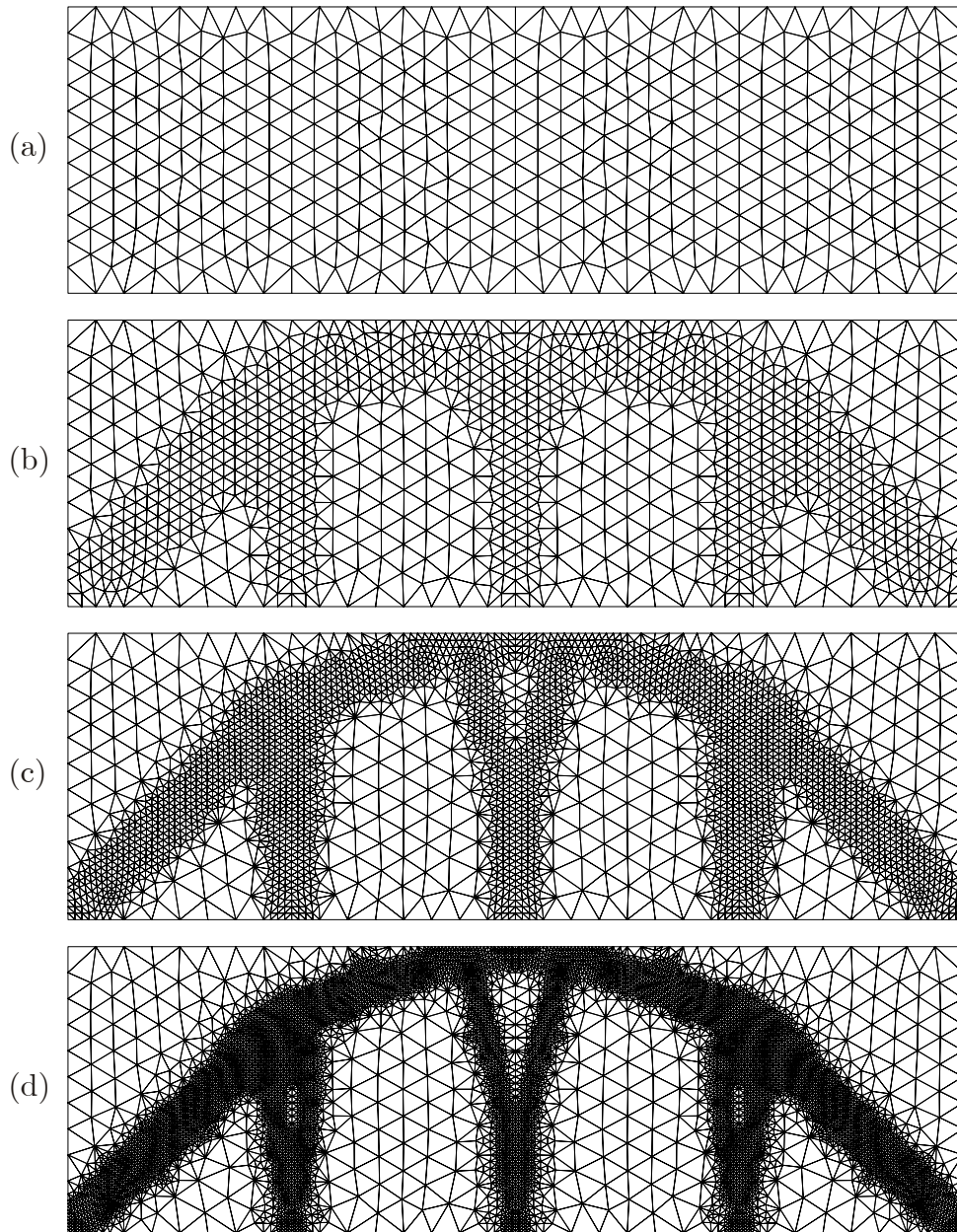


Figura 2.19: Seq. de malhas resultantes do refino  $h$ -adaptativo do prob. (2.4).

Para a verificação da dependência do leiaute ótimo, com relação às malhas iniciais, considera-se o problema ilustrado na Fig. 2.21. A malha ilustrada na Fig. 2.21(a) contém 4504 elementos, o tamanho dos elementos corresponde aproximadamente ao tamanho dos menores elementos da malha da Fig. 2.19(b). Comparando os resultados dados nas Figs. 2.20(a) e 2.21(b), verifica-se a ocorrência de uma estrutura mais esbelta após o refino, mostrando novamente uma dependência

da malha inicial. Aqui, a estratégia de refino  $h$ -adaptativo resultou em um leiaute ótimo, ilustrado nas Figs. 2.20(b-d), com um número menor de elementos estruturais que o leiaute da Fig. 2.21(b). Neste caso particular, a estratégia de refino  $h$ -adaptativo resultou num leiaute ótimo, ilustrado na Fig. 2.20(d), que é bastante diferente do resultado obtido na Fig. 2.21(b).

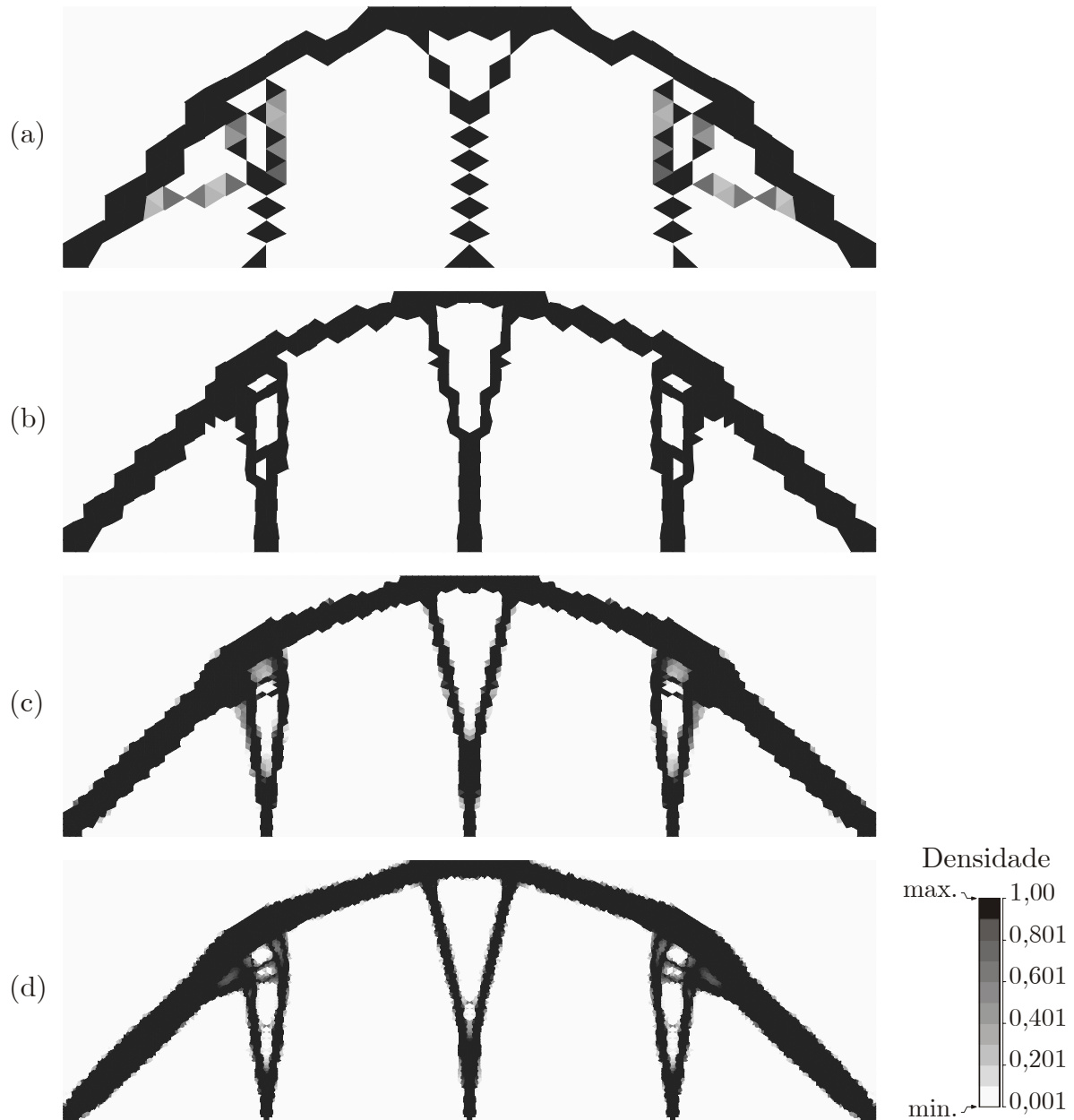


Figura 2.20: Seq. de leiautes resultantes do processo de otimização do prob. (2.4).

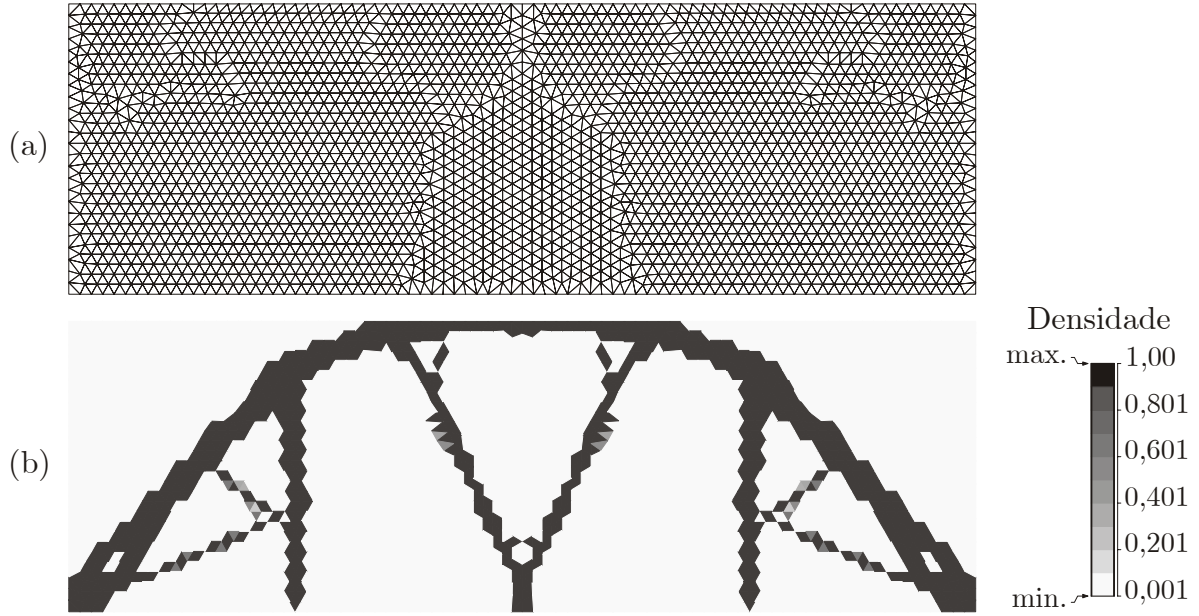


Figura 2.21: Verificação da dependência da sol. do prob. (2.4) com a malha inicial.

## 2.7 Conclusão

O novo processo proposto neste capítulo é robusto computacionalmente e efetivo na obtenção do leiaute ótimo da estrutura. Além disso, a resolução final do contorno material é diretamente dependente do tamanho do elemento finito empregado na malha inicial. A utilização de elementos do tipo *pixel* apresenta baixo custo computacional, quando do cálculo da matriz de rigidez e da função objetivo. Entretanto, o procedimento baseado em *pixel* requer uma malha uniforme, o que resulta em um aumento inadmissível do número de variáveis de projeto, necessário para um leiaute ótimo de alta resolução, tornando o processo praticamente inviável.

O processo proposto, de otimização de leiaute combinado com a estratégia de refino *h*-adaptativo, indica uma direção promissora de pesquisa, capaz de resolver problemas de otimização de leiautes de um modo efetivo gerando soluções com uma nítida resolução. Embora o custo de calcular a função objetivo seja maior que o da formulação baseada em *pixel*, a grande diminuição do número de variáveis de projeto compensa amplamente, o aumento do custo computacional no cálculo da função objetivo. Note que, esta diminuição das variáveis de projeto torna-se ainda mais relevante com o aumento do número de níveis de refinamentos aplicados. Assim, recomenda-se a especificação *a priori* do número total de níveis de refinamentos utilizando o critério de tamanho do elemento, já explicado anteriormente.

A introdução de uma medida para a avaliação da qualidade do elemento é necessária para a minimização da deterioração da malha, que é ocasionada pela aplicação da seqüência de refinamentos  $h$ -adaptativos. A introdução de um estimador de erro visa reduzir o erro da solução da equação de estado e em geral atua nos elementos menos refinados no processo de refino.

De acordo com os testes realizados, é verificada uma relevante dependência do leiaute ótimo com relação à malha inicial, ou seja, malhas iniciais diferentes podem conduzir a diferentes leiautes ótimos. Para contornar esta dependência da malha inicial, pode ser considerado um filtro independente da malha ou a imposição de uma restrição de gradiente local, como proposto por Sigmund & Petersson (1998). Entretanto, uma vez que a malha inicial é definida, a seqüência de resultados dos leiautes ótimos parciais indica uma convergência para um leiaute ótimo, com a aplicação do esquema de refino  $h$ -adaptativo. Portanto, se o objetivo é desenvolver pacotes comerciais de ferramentas de projeto, deve ser considerado como uma exigência primária que o contorno material seja nitidamente definido e que o leiaute ótimo seja independente da malha. Neste sentido, o processo proposto aponta para novas direções que podem ser desenvolvidas para alcançar estes objetivos.



## Capítulo 3

# Placas Espessas sob Minimização da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri6

### 3.1 Introdução

Diferentes métodos têm sido aplicados à solução de problemas de otimização de leiautes. Entretanto, a grande maioria destes métodos é pertencente ou é uma combinação das duas técnicas seguintes de otimização de leiautes:

#### (i) A otimização estrutural evolutiva (ESO)

Basicamente, a abordagem ESO introduz um critério que define qual elemento será mantido e qual será removido no processo evolutivo pelo método *hard-kill*, ver Chu *et al.* (1997) e Xie & Steven (1996). Diferentes variações dos métodos ESO têm sido propostas na literatura. Entre estas, encontra-se o método adaptativo reverso, proposto por Reynolds *et al.* (1999). Este método considera, em cada iteração do processo evolutivo, a determinação da distribuição da tensão efetiva na estrutura e a subsequente determinação de uma nova malha, a qual é definida no domínio formado por uma determinada curva de nível de tensão. Algumas variações do método ESO foram propostas, como a otimização estrutural evolutiva aditiva, i.e. AESO, que considera uma estrutura base sujeita a cargas prescritas. Neste método, o material é acrescido nas regiões que apresentam maior nível de concentração de tensão, com o objetivo de amenizar a distribuição de tensão, ver Querin *et al.* (2000a). Existe ainda a otimização estrutural evolutiva bidirecional, denotada por BESO, proposta por Querin *et al.* (2000b).

#### (ii) A abordagem de material composto

Nesta abordagem, o material é considerado como tendo uma microestrutura, a qual é parametrizada por um conjunto de variáveis de projeto. Pela variação destes parâmetros, é possível representar regiões de material e regiões de vazio, definindo o leiaute ótimo das estruturas. Este método também tem sido aplicado para a determinação de leiautes ótimos de placas, em diferentes colocações, cuja grande

maioria tem sido baseada no modelo de Mindlin-Reissner, ver Bendsoe *et al.* (1992), Bendsoe & Díaz (1993), Soto & Díaz (1992 e 1993), Suzuki & Kikuchi (1991), Díaz *et al.* (1995), Kikuchi *et al.* (1995), Krog & Olhoff (1999), Belblidia *et al.* (2001) e Belblidia & Hinton (2002).

A formulação proposta neste capítulo utiliza uma abordagem de material poroso, a qual utiliza a microestrutura apresentada por Gea (1996). Neste modelo de microestrutura, a equação constitutiva homogeneizada depende apenas da densidade relativa do material.

O processo proposto combina a otimização de leiaute de placas espessas com um esquema de refino  $h$ -adaptativo, e tem como objetivo determinar de modo eficiente, um leiaute ótimo bem definido, i.e., que proporcione uma alta definição na distribuição de regiões materiais e regiões de vazio no domínio inicial considerado, ver Costa Jr. & Alves (2002). O método proposto considera a solução de uma sequência de otimização de leiaute seguido por um processo de refino  $h$ -adaptativo, como ilustrado nas Figs. 3.3(a-f). O processo de refino determina basicamente o conjunto de elementos que devem ser refinados e gera os elementos de transição necessários para assegurar a compatibilidade da malha. O número total de níveis de refino é definido *a priori*, e é determinado baseado na resolução especificada do leiaute final. A resolução do leiaute final está diretamente relacionada ao tamanho médio final do elemento, que é estimado ao aplicar os sucessivos refinamentos ao elemento de tamanho médio da malha inicial.

O problema a ser analisado neste capítulo tem como objetivo a minimização da flexibilidade de estruturas submetidas à restrição de volume e às restrições laterais das variáveis de projeto.

## 3.2 Formulação do problema

### 3.2.1 Introdução

Nesta seção são apresentadas algumas definições e a descrição do problema de otimização de leiaute, inicialmente como um sólido tridimensional. Posteriormente são aplicadas as hipóteses do modelo de placa considerado, possibilitando a derivação do problema de otimização do leiaute de placas espessas.

Um problema típico de placa está ilustrado na Fig. 3.1, na qual, é definido o domínio  $\Omega$  do corpo a ser considerado, cujo contorno é denotado por  $\partial\Omega$ ,  $h$  é a espessura da placa e  $\Lambda$  denota a superfície média de referência. O contorno  $\partial\Omega$  é dividido em duas partes:  $\Gamma_u$  que representa a parte de  $\partial\Omega$  sujeita a um deslocamento prescrito, i.e.,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;  $\Gamma_t$  que representa a parte de  $\partial\Omega$  sujeita a uma tração prescrita, ou seja  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ , sendo que  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ . Denota-se por  $\bar{\mathbf{b}}$  a força de corpo prescrita definida em  $\Omega$  e por  $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  e  $H = \{ \bar{\mathbf{u}} + H_o \}$  os conjuntos das variações e dos deslocamentos admissíveis respectivamente.

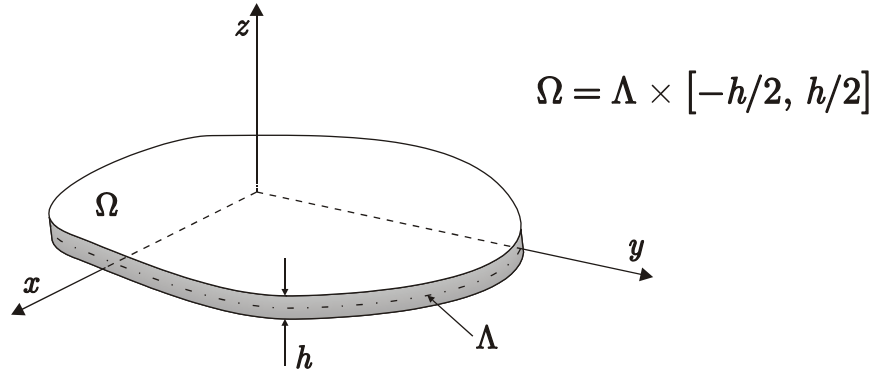


Figura 3.1: Caracterização geométrica da placa.

### 3.2.2 Definição do modelo da microestrutura

O modelo da microestrutura utilizada foi proposto por Gea (1996) e consiste em um material cuja microestrutura é formada pela presença de microvazios esféricos inseridos numa matriz sólida, ver também Chickermane & Gea (1997). A equação constitutiva derivada do modelo é descrita por uma expressão analítica simples a qual depende unicamente de  $\rho$ , i.e. da densidade relativa do material. Agora, assumindo que o coeficiente de Poisson  $\nu_o = 1/3$  e denominando  $E_o$  e  $G_o$ , como sendo respectivamente, o módulo de Young e o módulo de cisalhamento do material completamente denso, deriva-se:

$$E(\rho) = \frac{\rho E_o}{2 - \rho} \quad \text{e} \quad G(\rho) = \frac{8\rho G_o}{15 - 7\rho} . \quad (3.1)$$

Este modelo tem como vantagem a sua derivação consistente da teoria de material composto o que permite uma realização física, para cada valor de densidade intermediária. A equação constitutiva homogeneizada tridimensional pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^H(\rho)] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

no qual  $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$  com

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = \begin{bmatrix} [\mathbf{Q}_{11}^H(\rho)] & [0] \\ [0] & [\mathbf{Q}_{22}^H(\rho)] \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$[\mathbf{Q}_{11}^H(\rho)] = \frac{E(\rho)}{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \begin{bmatrix} (1-\nu_o) & \nu_o & \nu_o \\ \nu_o & (1-\nu_o) & \nu_o \\ \nu_o & \nu_o & (1-\nu_o) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

e

$$[\mathbf{Q}_{22}^H(\rho)] = G(\rho) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Formulação do problema de otimização de leiaute tridimensional

O problema é formulado inicialmente como um sólido tridimensional, e posteriormente é aplicada a hipótese de placas espessas. O problema de otimização de leiaute generalizado pode ser formulado como: Determinar a densidade relativa  $\rho(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$ , a qual é solução de

$$\min_{\rho} l(\mathbf{u}(\rho)) \quad (3.6)$$

sujeita às seguintes restrições:

(i) Restrição de volume efetivo

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha$  é a fração de volume prescrita;

(ii) Restrições de limites laterais

$$\rho_{\inf} \leq \rho \leq 1, \quad (3.8)$$

no qual  $\rho_{\inf} = 0,001$  é um limite inferior prescrito.

O campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  é solução de: Determinar  $\mathbf{u}(\rho) \in H$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \quad \mathbf{v} \in H_0 \quad (3.9)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (3.10)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (3.11)$$

### 3.2.4 Teoria de placas de ordem superior

Neste ponto, a formulação geral representada pelas eqs. (3.10) e (3.11), é particularizada para estruturas de placas espessas. O modelo de placa espessa é baseado no trabalho de Kant (1982), o qual considera a equação constitutiva dada na eq. (3.2), e introduz um conjunto de hipóteses cinemáticas. Estas hipóteses consideram o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sendo dado por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_x(\mathbf{x}) \mathbf{e}_x + u_y(\mathbf{x}) \mathbf{e}_y + u_z(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z, \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  são os vetores que formam a base cartesiana ortonormal, e

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) - z^3\theta_x^*(x, y) \end{aligned}$$

e

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + z^2w^*(x, y). \quad (3.13)$$

Como resultado, as componentes do tensor deformação infinitesimal são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{xx}^0 + z\chi_{xx}^0 + z^3\chi_{xx}^*, & \varepsilon_{yy} &= e_{yy}^0 + z\chi_{yy}^0 + z^3\chi_{yy}^*, \\ \varepsilon_{zz} &= ze_{zz}, & \gamma_{xy} &= (\gamma_{xy}^0) + z(\chi_{xy}^0) + z^3(\chi_{xy}^*), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 + z^2\gamma_{xz}^* & \text{e} & \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 + z^2\gamma_{yz}^*. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sendo aqui denominados

$$\begin{aligned}
e_{xx}^o &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy}^o &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xy}^o &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\chi_{xx}^o &= \frac{\partial \theta_y^o}{\partial x}, & \chi_{yy}^o &= -\frac{\partial \theta_x^o}{\partial y}, & \chi_{xy}^o &= \frac{\partial \theta_y^o}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^o}{\partial x}, \\
\chi_{xx}^* &= \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}, & \chi_{yy}^* &= -\frac{\partial \theta_x^*}{\partial y}, & \chi_{xy}^* &= \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}, \\
\gamma_{xz}^o &= \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}^o &= -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\gamma_{xz}^* &= 3\theta_y^* + \frac{\partial w^*}{\partial x}, & \gamma_{yz}^* &= -3\theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial y} \quad \text{e} \quad e_{nn} = 2w^*.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Definindo, adicionalmente que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^T &= \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} dz, \\
\mathbf{M}^T &= \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} z dz, \\
\{\mathbf{M}^*\}^T &= \{M_{xx}^*, M_{yy}^*, M_{xy}^*\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} z^3 dz, \\
N_{nn} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} z dz, \\
\mathbf{Q}^T &= \{Q_{xz}, Q_{yz}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} dz,
\end{aligned}$$

e

$$\{\mathbf{Q}^*\}^T = \{Q_{xz}^*, Q_{yz}^*\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} z^2 dz, \tag{3.16}$$

podem ser obtidas às equações constitutivas homogeneizadas generalizadas, como:

**(i) Equação constitutiva generalizada de membrana**

$$\mathbf{N} = [\mathbf{D}_m] \mathbf{e}_m^o \tag{3.17}$$

sendo que:  $\{\mathbf{e}_m^o\}^T = \{e_{xx}^o, e_{yy}^o, \gamma_{xy}^o\}$ ,  $[\mathbf{D}_m] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_m^{11}] & 0 \\ 0 & D_m^{22} \end{bmatrix}$ ,

$$[\mathbf{D}_m^{11}] = \frac{E(\rho)h}{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \begin{bmatrix} (1-\nu_o) & \nu_o \\ \nu_o & (1-\nu_o) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_m^{22} = G(\rho)h. \tag{3.18}$$

**(ii) Equação constitutiva generalizada de flexão de primeira ordem**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{D}_b^o] \boldsymbol{\chi}^o + [\mathbf{D}_b^*] \boldsymbol{\chi}^* + \mathbf{w} e_{nn} \quad (3.19)$$

onde define-se:  $\{\boldsymbol{\chi}^o\}^T = \{\chi_{xx}^o, \chi_{yy}^o, \chi_{xy}^o\}$ ,  $\{\boldsymbol{\chi}^*\}^T = \{\chi_{xx}^*, \chi_{yy}^*, \chi_{xy}^*\}$ ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_b^o] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_b^{o^{11}}] & 0 \\ 0 & D_b^{o^{22}} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{D}_b^{o^{11}}] &= \frac{E(\rho)h^3}{12(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \begin{bmatrix} (1-\nu_o) & \nu_o \\ \nu_o & (1-\nu_o) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_b^{o^{22}} = G(\rho) \frac{h^3}{12}, \\ [\mathbf{D}_b^*] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_b^{*^{11}}] & 0 \\ 0 & D_b^{*^{22}} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{D}_b^{*^{11}}] &= \frac{E(\rho)h^5}{80(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \begin{bmatrix} (1-\nu_o) & \nu_o \\ \nu_o & (1-\nu_o) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_b^{*^{22}} = G(\rho) \frac{h^5}{80}, \\ \mathbf{w}^T &= \frac{\nu E(\rho)h^3}{12(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \{1, 1, 0\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

**(iii) Equação constitutiva generalizada de flexão de ordem superior**

$$\mathbf{M}^* = [D_b^*] \boldsymbol{\chi}^o + [D_b^{**}] \boldsymbol{\chi}^* + \mathbf{w}^* e_{nn} \quad (3.21)$$

sendo

$$\begin{aligned} [D_b^{**}] &= \begin{bmatrix} [D_b^{**^{11}}] & 0 \\ 0 & D_b^{**^{22}} \end{bmatrix}, \\ [D_b^{**^{11}}] &= \frac{E(\rho)h^7}{448(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \begin{bmatrix} (1-\nu_o) & \nu_o \\ \nu_o & (1-\nu_o) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_b^{**^{22}} = G(\rho) \frac{h^7}{448}, \\ \{\mathbf{w}^*\}^T &= \frac{\nu E(\rho)h^5}{80(1+\nu_o)(1-2\nu_o)} \{1, 1, 0\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

**(iv) Equação constitutiva generalizada de cisalhamento de primeira ordem**

$$\mathbf{Q} = G(\rho)h \boldsymbol{\gamma}_t^o + G(\rho) \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\gamma}_t^* \quad (3.23)$$

sendo aqui denotado que  $\{\boldsymbol{\gamma}_t^o\}^T = \{\gamma_{xz}^o, \gamma_{yz}^o\}$  e  $\{\boldsymbol{\gamma}_t^*\}^T = \{\gamma_{xz}^*, \gamma_{yz}^*\}$ .

**(v) Equação constitutiva generalizada de cisalhamento de ordem superior**

$$\mathbf{Q}^* = G(\rho) \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\gamma}_t^o + G(\rho) \frac{h^5}{80} \boldsymbol{\gamma}_t^* . \quad (3.24)$$

**(vi) Equação constitutiva generalizada normal**

$$N_{nn} = \frac{E(\rho) h^3 (1 - \nu_o)}{12(1 + \nu_o)(1 - 2\nu_o)} e_{nn} + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\chi}^o + \mathbf{w}^* \cdot \boldsymbol{\chi}^* . \quad (3.25)$$

Definindo agora o campo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^o + z \hat{\boldsymbol{\theta}} + z^2 \mathbf{v}^* + z^3 \hat{\boldsymbol{\theta}}^* \quad (3.26)$$

sendo que  $\{\mathbf{v}^o\}^T = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ ,  $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}^T = \{\hat{\theta}_y, -\hat{\theta}_x, 0\}$ ,  $\{\mathbf{v}^*\}^T = \{0, 0, \hat{w}^*\}$  e  $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\}^T = \{\hat{\theta}_y^*, -\hat{\theta}_x^*, 0\}$ ; integrando a eq. (3.10) em  $z$ ,  $z \in [-h/2, h/2]$  e utilizando o conjunto de eqs. (3.16) obtém-se a seguinte expressão

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Lambda} \{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_m^o(\mathbf{v}) + \Phi + \Xi + N_{nn} e_{nn}(\mathbf{v})\} d\Lambda , \quad (3.27).$$

sendo denotado que  $\Phi = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\chi}^o(\mathbf{v}) + \mathbf{M}^* \cdot \boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{v})$  e  $\Xi = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma}_t^o(\mathbf{v}) + \mathbf{Q}^* \cdot \boldsymbol{\gamma}_t^*(\mathbf{v})$ .

Além disso, assumindo  $\bar{\mathbf{b}}$  como sendo constante, integrando a eq. (3.11) em  $z$ , para  $z \in [-h/2, h/2]$  e utilizando o conjunto de eqs. (3.16), deriva-se:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}^o, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{v}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) &= \int_{\Lambda} \left\{ h \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}^o + \frac{h^3}{12} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}^* \right\} d\Lambda + \\ &+ \int_{\Gamma_t} \left\{ \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^o + \bar{\mathbf{M}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{v}^* + \bar{\mathbf{M}}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}^* \right\} ds \end{aligned} \quad (3.28)$$

sendo

$$\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{t}}^*, \bar{\mathbf{M}}^*\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2, z^3\} \bar{\mathbf{t}} dz . \quad (3.29)$$

### 3.3 Formulação discreta do problema

Para a discretização do problema é aplicado o Método dos Elementos Finitos de Galerkin e considera-se que a densidade relativa do material é constante no interior de cada elemento finito. Como resultado, as densidades relativas são naturalmente as variáveis de projeto do problema de otimização.



Com o objetivo de evitar os problemas de instabilidades, devido ao surgimento dos problemas de tabuleiro, ver Bendsoe (1995), Bendsoe & Sigmund (1999) e Sigmund & Petersson (1998); foi utilizado um elemento finito quadrático convencional Tri6 subparamétrico, que considera uma interpolação linear para a geometria, i.e., arestas retilíneas, e uma interpolação quadrática para o campo de deslocamento. De fato, a utilização de um elemento finito com alta ordem de interpolação mostrou evitar o problema de instabilidade de tabuleiro, para a microestrutura escolhida.

O problema discreto de otimização de leiaute de placas espessas pode ser formulado como: Determinar o vetor de densidades relativas dos elementos,  $\mathbf{\rho} \in \mathbb{R}^{n_e}$ , o qual é solução de:

$$\min_{\mathbf{\rho}} f(\mathbf{u}^o(\mathbf{\rho}), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{\rho}), \mathbf{u}^*(\mathbf{\rho}), \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{\rho})) \quad (3.30)$$

tal que

$$h(\mathbf{\rho}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e \Omega_e - \alpha = 0, \quad \forall \quad \mathbf{\rho} \in \mathbf{X} \quad (3.31)$$

onde

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{\rho} \in \mathbb{R}^{n_e} \mid \rho_e^{\inf} \leq \rho_e \leq \rho_e^{\sup}, \quad e = 1, \dots, n_e \right\}. \quad (3.32)$$

A função objetivo, aqui, é definida por  $f(\mathbf{u}^o, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{\beta_o} l(\mathbf{u}^o, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ , sendo que  $\beta_o = l(\mathbf{u}^o(\mathbf{\rho}_o), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{\rho}_o), \mathbf{u}^*(\mathbf{\rho}_o), \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{\rho}_o))$  para um dado vetor de densidade inicial  $\mathbf{\rho}_o$ , e  $n_e$  denota o número total de elementos da malha. Neste caso, os campos  $(\mathbf{u}^o, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$  são determinados pela solução da eq. (3.9), onde são utilizadas as eqs. (3.27) e (3.28).

Para a solução do problema discreto, definido nas eqs. (3.30) e (3.31), é aplicado o Método do Lagrangiano Aumentado. Como consequência, o problema resultante é formulado como sendo a solução de uma seqüência de problemas de otimização com restrições do tipo caixa, o qual pode ser resumido como:

- Definir valores iniciais:  $k = 0$ ,  $\lambda^k = 0$ ,  $erro = 1,0$ ,  $\varepsilon^k$  e  $tol$ .
- Enquanto  $erro > tol$ , efetuar *laço*:
  - (i) Solução do problema de minimização com restrições laterais

$$\min \chi(\boldsymbol{\rho}, \lambda^k, \varepsilon^k), \quad \forall \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X} \quad (3.33)$$

onde

$$\chi(\boldsymbol{\rho}, \lambda^k, \varepsilon^k) = f(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2\varepsilon^k} h(\boldsymbol{\rho}) [h(\boldsymbol{\rho}) + 2\varepsilon^k \lambda^k]. \quad (3.34)$$

Neste ponto, denota-se a solução, para um dado  $(\lambda^k, \varepsilon^k)$ , por  $\boldsymbol{\rho}^k$ .

(ii) Atualização do multiplicador de Lagrange

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{1}{\varepsilon^k} h(\boldsymbol{\rho}^k); \quad (3.35)$$

(iii) Determinação do erro

$$erro = |\lambda^{k+1} - \lambda^k|; \quad (3.36)$$

(iv) Atualização do parâmetro de penalidade

$$\varepsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \varepsilon^k, & \text{se } \varepsilon^{k+1} < \varepsilon_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0,1) \\ \varepsilon_{crit}, & \text{se } \varepsilon^{k+1} \geq \varepsilon_{crit} \end{cases}. \quad (3.37)$$

• Fim do *laço*

O problema de otimização de caixa é resolvido por um método de projeção de segunda ordem, o qual faz uso do método de quase-Newton sem memória (ver apêndice A).

### 3.4 Refino da malha com adaptatividade $h$

A descrição geral do método utilizado neste capítulo é análoga à descrita na subseção 2.4.1. A estratégia de refino  $h$ -adaptativo é a idêntica à descrita na subseção 2.4.2. O mesmo ocorre com o processo de suavização Laplaciano condicional, descrito na subseção 2.4.3. Resta, portanto a descrição do estimador de erro e do critério de refino.

#### 3.4.1 Estimador de erro e critério de refino

Por simplicidade, foi empregado um estimador de erro baseado nos trabalhos de Zienkiewics & Zhu (1990 e 1991). Observe que, na formulação, a equação

constitutiva depende da densidade relativa do material, a qual é assumida constante no domínio de cada elemento. Como resultado, é obtido um campo de tensão descontínuo. Conseqüentemente, o estimador de erro é modificado utilizando o campo de deformação. Seja  $\boldsymbol{\rho}$  uma dada distribuição realizável da densidade relativa do material. Então, o erro local do deslocamento pode ser definido como:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$  é a solução exata e  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})$  é a solução aproximada do problema. Então, a norma da energia pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega \end{aligned} \quad (3.39)$$

sendo que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})$ . Como a distribuição de deformação exata é desconhecida, aproxima-se  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho})$  por uma solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$ , a qual é mais refinada que  $\boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})$ . Assim, o indicador de erro é aproximado por:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (3.40)$$

Para a determinação da solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$ , aplica-se a mesma técnica de projeção proposta por Zienkiewics & Zhu (1990 e 1991). Assim, a determinação de  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  consiste na solução por mínimos quadrados do potencial  $\psi(\boldsymbol{\rho})$ , dado por

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})\|^2 d\Omega \quad (3.41)$$

Aqui, as componentes de  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  são interpoladas dentro de cada elemento como:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{xx}^* &= \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ \bar{e}_{xx_j}^o + z \bar{\chi}_{xx_j}^o + z^3 \bar{\chi}_{xx_j}^* \right\}, & \bar{\varepsilon}_{yy}^* &= \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ \bar{e}_{yy_j}^o + z \bar{\chi}_{yy_j}^o + z^3 \bar{\chi}_{yy_j}^* \right\} \\ \bar{\varepsilon}_{zz}^* &= \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ z \bar{e}_{nn_j} \right\}, & \bar{\gamma}_{xy}^* &= \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ \bar{\gamma}_{xy_j}^o + z \bar{\chi}_{xy_j}^o + z^3 \bar{\chi}_{xy_j}^* \right\}, \\ \bar{\gamma}_{xz}^* &= \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ \bar{\gamma}_{xz_j}^o + z^2 \bar{\gamma}_{xz_j}^* \right\} & \text{e} & \bar{\gamma}_{yz}^* = \sum_{j=1}^{n_d} N_j \left\{ \bar{\gamma}_{yz_j}^o + z^2 \bar{\gamma}_{yz_j}^* \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo que  $n_d$  é o número de nós do elemento e  $N_j$  são as funções clássicas de interpolação dos elementos finitos. Neste ponto, uma vez que  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho})$  é determinada, pode-se calcular o erro médio global  $\Theta_G$ , como

$$\Theta_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega; \quad (3.43)$$

o erro médio do elemento  $\Theta_e$ , como

$$\Theta_e = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})] (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega_e. \quad (3.44)$$

### 3.5 Resultados

O objetivo, nesta seção, é resolver um conjunto de problemas que permita avaliar o desempenho do processo proposto. Além disso, para acompanhar a evolução do leiaute ótimo, gerado pela sequência de otimização de leiaute seguido pelo esquema de refino  $h$ -adaptativo, são ilustradas todas as soluções ótimas intermediárias. É importante observar que o conhecimento da história do leiaute permite não somente verificar a dependência da malha do leiaute ótimo, mas também verificar o acréscimo de qualidade na definição do leiaute ótimo, como resultado do processo proposto. Em todos os exemplos seguintes, foram considerados um único material cujas propriedades são dadas por: módulo de Young  $E_o = 215,0$  GPa e o coeficiente de Poisson  $\nu_o = \frac{1}{3}$ .

A malha inicial é obtida com um gerador de malha padrão. Para definir o tamanho médio dos elementos da malha inicial é empregado um critério heurístico. O critério considera que o tamanho médio seja suficientemente pequeno, de modo que a solução aproximada por elementos finitos esteja perto da solução “exata” do problema.

#### Problema 3.1:

O objetivo neste exemplo é a determinação do leiaute ótimo de uma placa engastada no lado esquerdo e submetida à uma carga concentrada transversal  $\mathbf{P} = 5,0 \times 10^6$  N, aplicada no meio do lado direito, como ilustrado na Fig. 3.2. A placa tem uma espessura  $h = 0,16$  m e o problema considera uma fração de volume prescrita  $\alpha = 0,4$ .

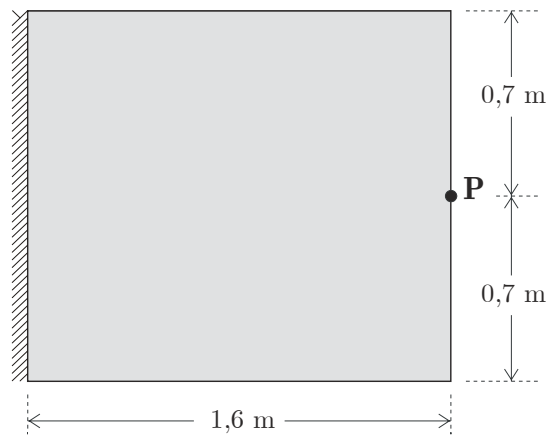


Figura 3.2: Definição do problema (3.1).

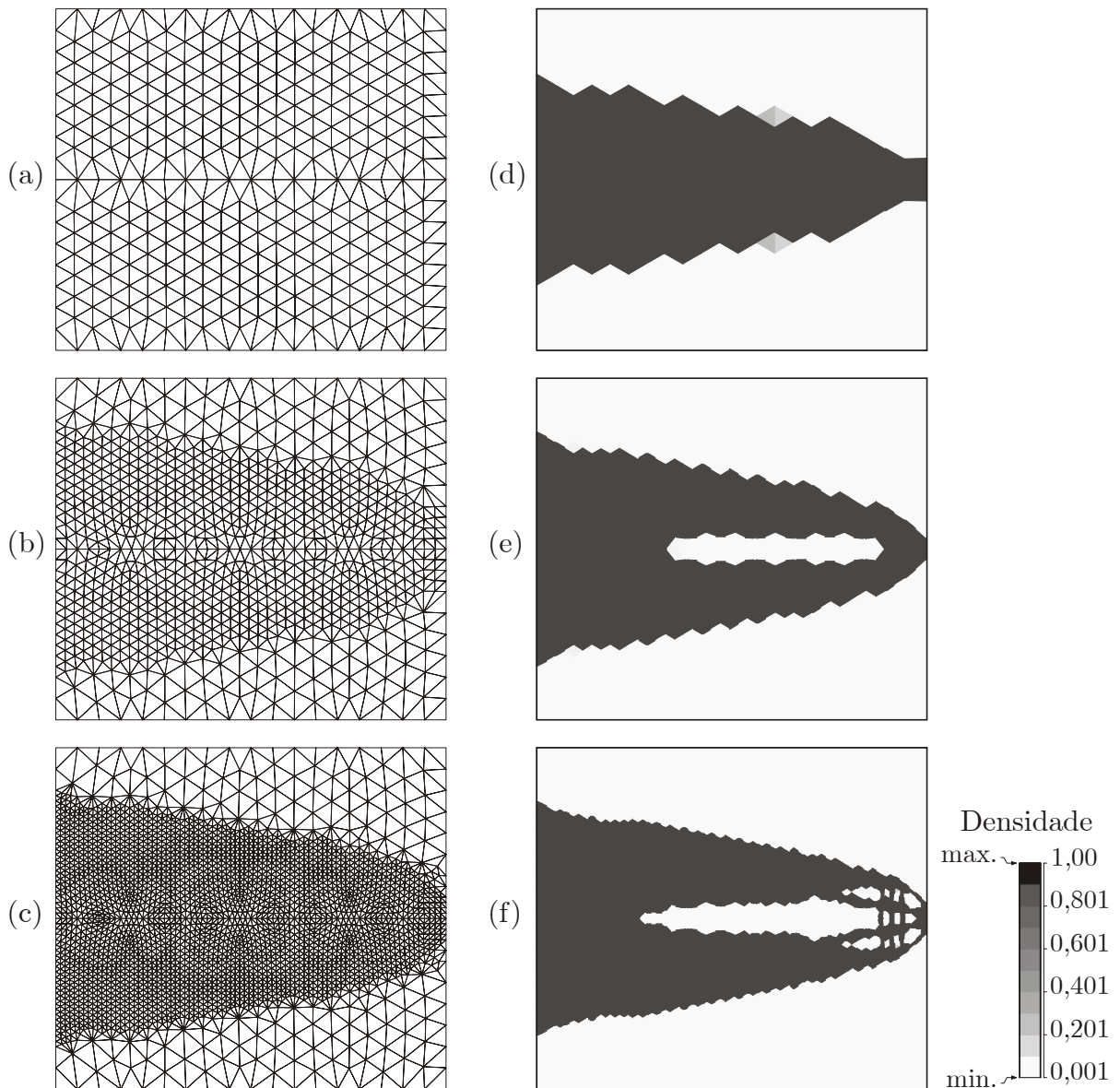


Figura 3.3: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.1).

A sequência de leiautes ótimos, ilustrada nas Figs. 3.3(a-f), define a distribuição do campo de densidade relativa e a evolução do refino  $h$ -adaptativo das malhas associadas a cada problema de otimização. As seqüências de malhas resultantes dos processos de refino são mostradas nas Figs.: 3.3(a) com 620 elementos; 3.3(b) com 1640 elementos; 3.3(c) com 5440 elementos. A evolução dos leiautes ótimos parciais, mostrando o aumento da resolução do contorno material, está ilustrada nas Figs. 3.3(d-f). Neste ponto, é importante ressaltar que a topologia dos leiautes ótimos parciais tem variado de um nível para o outro.

### Problema 3.2:

O problema neste caso é a determinação do leiaute ótimo de uma placa quadrada engastada em todas as laterais, sujeita a uma carga concentrada transversal  $\mathbf{P}=50,0 \times 10^6$  N aplicada ao centro, como ilustrado na Fig. 3.4. A espessura da placa é de  $h = 0,12$  m, a dimensão lateral da placa quadrada é  $l = 2,0$  m e a fração de volume prescrita  $\alpha = 0,35$ . A seqüência de leiautes ótimos, ilustrada nas Figs. 3.5(e-h), descreve a distribuição do campo de densidade relativa. A evolução do refino  $h$ -adaptativo das malhas associadas a cada problema de otimização é ilustrada nas Figs. 3.5(a-d). O processo foi iniciado com uma malha de 128 elementos, ver Fig. 3.5(a), e o leiaute ótimo obtido foi ilustrado na Fig. 3.5(e). Dando seqüência ao processo, um refino  $h$ -adaptativo foi aplicado e uma nova malha foi gerada, Fig 3.5(b) com 432 elementos. Com esta nova malha, um novo problema de otimização de leiaute foi resolvido. O resultado deste nível de refino  $h$ -adaptativo está ilustrado na Fig. 3.5(f). Este procedimento foi repetido para mais dois níveis de refino, resultando nas respectivas malhas e leiautes ótimos ilustrados respectivamente nas Figs. 3.5(c,g), com 1408 elementos e Figs. 3.5(d,h) com 5032 elementos. O número total de níveis de refino foi especificado *a priori* e considerado como sendo três. Assim, pode ser visto que a resolução do leiaute ótimo final está diretamente relacionada ao tamanho médio dos elementos da malha inicial e ao número total, definido *a priori*, de níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos.

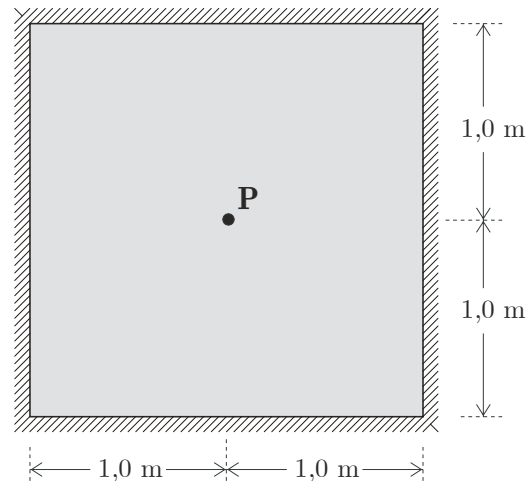


Figura 3.4: Definição do problema (3.2).

### Problema 3.3:

Agora, um problema semelhante ao caso (3.2) é resolvido, porém, com uma malha inicial não estruturada, ilustrada na Fig. 3.6(a). A fração de volume prescrita neste caso é de  $\alpha = 0,3$ . A sequência de refinamentos  $h$ -adaptativos e as distribuições da densidade relativa, definindo os leiautes ótimos, são ilustradas nas Figs. 3.6(a-c) e 3.6(d-f) respectivamente. Neste caso, o processo de otimização de leiaute é iniciado com uma malha de 1656 elementos, ver Fig. 3.6(a), resultando no leiaute ótimo ilustrado na Fig. 3.6(d). Daí, o processo de refino  $h$ -adaptativo é aplicado e a nova malha é gerada, ver Fig 3.6(b) com 3864 elementos. Com esta nova malha, um novo problema de otimização de leiaute é resolvido. O resultado deste primeiro nível de refino  $h$ -adaptativo está ilustrado na Fig. 3.6(e). Este procedimento é repetido para mais um nível de refino, resultando na malha e no leiaute ótimo ilustrados nas Figs. 3.6(c,f), com 12184 elementos. Verificando os resultados, pode ser observada a dependência do leiaute ótimo com a malha inicial. Mas também é notória a considerável melhora na resolução do leiaute ótimo descritos pela interface material/vazio da estrutura de placa espessa, resultante da estratégia proposta neste trabalho. Além disso, pode-se verificar que, com a solução de uma sequência de problemas de leiaute seguidos por um refino  $h$ -adaptativo, a sequência resultante de leiautes ótimos tende a convergir para uma topologia ótima final.

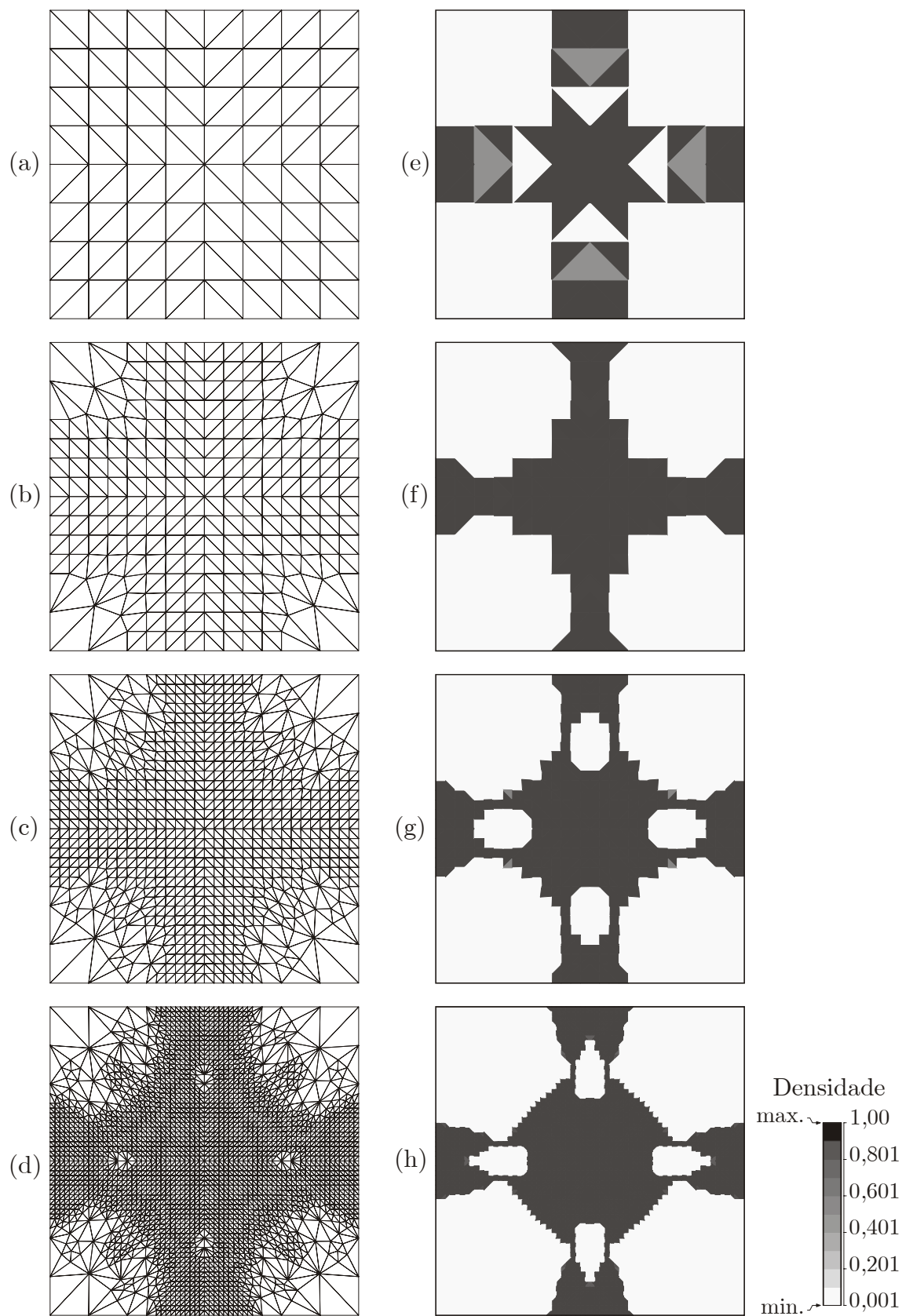


Figura 3.5: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.2).



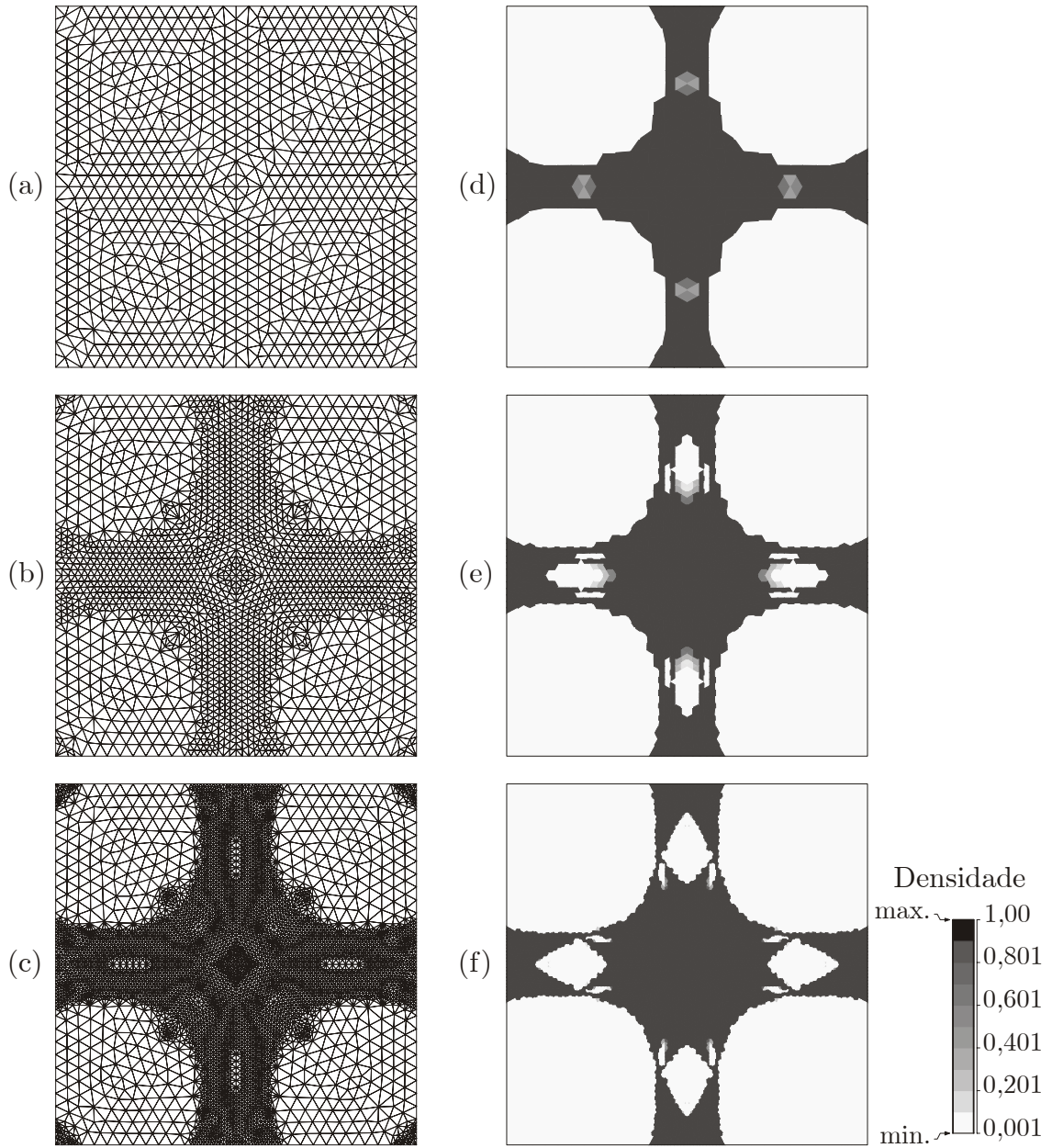


Figura 3.6: Seq. de malhas e leiautes resultantes problema (3.3).

### 3.6 Conclusão

A metodologia proposta, a qual combina um método de otimização de leiaute com um procedimento de refino  $h$ -adaptativo, mostrou ser robusta e capaz de gerar um leiaute ótimo de boa resolução na solução de problemas associados a placas espessas. Além disso, o método mostrou ser eficiente na redução do número de variáveis de projeto do leiaute ótimo de placa, para uma resolução prescrita. Observe que esta diminuição no número de variáveis de projeto torna-se ainda mais relevante com o aumento do número de níveis de refino do tipo  $h$ -adaptativo. Além disso, para

uma resolução refinada do leiaute ótimo, de maneira a gerar uma topologia de alta definição, o tradicional método de *pixel* requer um número consideravelmente alto de variáveis de projeto, resultando em um problema de otimização infactível.

Note que a resolução prescrita define o número total de níveis de refinamentos a serem aplicados no processo de otimização de leiaute, no caso de ser utilizado o critério de tamanho de elemento.

A consideração de uma medida de qualidade do elemento foi importante para a redução da deterioração da malha, resultante da aplicação sucessiva dos refinamentos *h*-adaptativos.

Os resultados obtidos no problema indicam uma provável dependência do leiaute ótimo com relação à malha inicial, ou seja, diferentes malhas iniciais podem propiciar diferentes leiautes ótimos. Entretanto, esta sensibilidade à malha inicial pode ser reduzida, considerando um filtro de malha independente ou impondo uma restrição de gradiente local, como proposta por Sigmund & Petersson (1998). Note que, uma vez que a malha inicial é definida, a sequência de leiautes ótimos tende a convergir para uma topologia ótima final, como resultado do esquema de refino *h*-adaptativo.

## Capítulo 4

# Estruturas 2D sob Minimização da Flexibilidade

## Utilizando Elementos Tri3

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é proposta uma estratégia de refino do tipo  $h$ -adaptativo, a qual é aplicada a um eficiente método de otimização de leiaute, que tem como objetivo: a determinação do leiaute ótimo da estrutura, com um alto grau de resolução na interface material; a redução do número de variáveis de projeto necessárias para a determinação da topologia ótima, para uma dada resolução; a redução do erro associado à solução da equação de estado, utilizada na modelagem do problema físico considerado. O processo consiste na solução de uma seqüência de problemas de otimização de leiaute intercalado por um passo de refino  $h$ -adaptativo. A malha de elementos finitos a ser otimizada, em cada nível do processo, é obtida da malha anterior, pela aplicação de um esquema de refino  $h$ -adaptativo. Este esquema determina os elementos a serem refinados e identifica os elementos de transição necessários para a obtenção de uma malha compatível de elementos finitos. O número total de níveis de refino  $h$ -adaptativo é especificado *a priori*.

O método de otimização de leiaute empregado neste trabalho é baseado na abordagem de material composto proposta por Bendsoe *et al.* (1993), Bendsoe (1995) e Bendsoe & Kikuchi (1998). Nestes trabalhos, a equação constitutiva homogeneizada é função somente da densidade relativa do material, denotada por  $\rho$ . Esta abordagem possui, entretanto, alguns problemas relacionados à existência de instabilidades numéricas, classicamente conhecidas como problemas de tabuleiro.

Diferentes soluções têm sido propostas visando contornar as instabilidades de tabuleiro, como pode ser visto nos trabalhos de Bendsoe (1995), Sigmund & Petersson (1998) e Petersson & Sigmund (1998). Alguns autores propõem a utilização de: elementos finitos mistos especiais; elementos finitos convencionais de ordem elevada de interpolação, como por exemplo, o elemento Tri6; elementos finitos convencionais

de ordem inferior, porém sujeitos a algum tipo de restrição imposta direta ou indiretamente às variáveis de projeto. Entre os diferentes tipos de restrições propostas, as mais citadas são: o controle do perímetro e o controle local do gradiente das variáveis de projeto, i.e., do gradiente da densidade relativa do material.

A formulação proposta neste capítulo utiliza o clássico elemento finito triangular de três nós, Tri3, o qual interpola não só as componentes do campo de deslocamento, assim como o campo de densidade relativa. Visando evitar a instabilidade do tipo tabuleiro, é imposta uma restrição do tipo caixa às componentes do gradiente da densidade relativa do material, como sugerido por Sigmund & Petersson (1998). Esta abordagem gera um processo de otimização de leiaute muito robusto e eficiente. A principal desvantagem é a ocorrência de uma camada de material de densidade intermediária,  $\rho_{\text{inf}} < \rho < 1$ , ao longo do contorno material. É importante observar que a região de densidade intermediária ao longo do contorno pode ser consideravelmente reduzida, pela utilização de um esquema de refino  $h$ -adaptativo adequado.

Neste capítulo, a formulação do problema de otimização tem como objetivo a minimização da flexibilidade da estrutura, sendo esta sujeita a: uma restrição de volume; restrições de limites laterais, i.e., restrições de caixa; restrições de caixa sobre as componentes do gradiente da densidade relativa do material. As configurações: inicial e final, típicas de um problema de otimização de leiaute, estão ilustradas nas Figs. 2.1(a,b), sendo definidos que:

- $\Gamma_u$  - é a parte do contorno com deslocamento prescrito, i.e.,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;
- $\Gamma_t$  - é a parte do contorno com tração prescrita, i.e.,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ ;
- $\Omega$  - é o domínio do corpo com  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ;
- $\mathbf{b}$  - é a força de corpo.

#### 4.1.1 Definição do problema

O problema neste capítulo restringe-se à determinação do leiaute ótimo de um corpo bidimensional, sujeito a um estado plano de tensões, o qual é formulado como: Determinar a densidade relativa  $\rho(\mathbf{x}) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , que é solução de:

$$\min_{\rho} l(\mathbf{u}(\rho)) \quad (4.1)$$

sujeita às restrições:

(i) Restrição de volume

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \alpha \Omega, \quad (4.2)$$

onde  $\Omega$  é o volume inicial do corpo,  $\rho$  é a densidade relativa e  $\alpha$  representa a fração de volume prescrita do corpo, com  $\alpha \in (0,1)$ .

(ii) Restrições laterais

Considera-se a densidade relativa do material,  $\rho$ , sendo definida no intervalo  $[\rho_{\inf}, 1]$ , com  $0 < \rho_{\inf}$ , i.e.,

$$\rho_{\inf} \leq \rho \leq 1, \quad (4.3)$$

sendo nesta aplicação considerado que  $\rho_{\inf} = 0,001$ .

(iii) Restrições de estabilidade

Estas restrições são empregadas visando: assegurar a existência de solução para o problema de otimização de leiaute, ver Bendsoe (1995) e Sigmund & Petersson (1998); evitar o problema de instabilidade de tabuleiro e reduzir a dependência da solução do leiaute ótimo com relação à malha inicial utilizada. Neste ponto é importante enfatizar que, para obter um alto desempenho computacional, é imprescindível a utilização de um elemento finito com baixa ordem de interpolação. Porém, a utilização de elementos de ordem baixa pode ocasionar, no caso da omissão da restrição de estabilidade, o aparecimento de instabilidade numérica. Como resultado, são impostas as seguintes restrições:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \leq C_x^2; \quad (4.4)$$

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \leq C_y^2. \quad (4.5)$$

Aqui, as constantes  $C_x$  e  $C_y$  definem os limites laterais para as componentes do gradiente da densidade relativa. Estas restrições são definidas em termos das componentes do gradiente da densidade relativa, visando à imposição adequada de condições de contorno de simetria, quando necessárias. A determinação destas

constantes e o processo adotado para a implementação das condições de simetria são explicados na subseção 4.2.1.

O campo de deslocamento,  $\mathbf{u}(\rho)$ , é determinado através da solução do seguinte problema de valor de contorno: Determinar  $\mathbf{u}(\rho)$ , onde  $\mathbf{u}(\rho) = \bar{\mathbf{u}}$  em  $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ , tal que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.6)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) = \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\rho)) \quad (4.7)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_t. \quad (4.8)$$

O operador  $\boldsymbol{\varepsilon}(\circ)$  é definido por:  $\boldsymbol{\varepsilon}(\circ) = \frac{1}{2}(\nabla(\circ) + \nabla(\circ)^T)$  o qual representa a parte simétrica do gradiente do campo em  $(\circ)$ ;  $\bar{\mathbf{b}}$  é a força de corpo prescrita aplicada ao corpo,  $\bar{\mathbf{t}}$  é a tração prescrita aplicada no contorno  $\Gamma_t$  e  $\mathbf{D}^H$  é a equação constitutiva homogeneizada do material, associada à microestrutura utilizada. Adicionalmente, denotam-se  $H(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  o conjunto dos deslocamentos admissíveis e  $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  o conjunto das variações admissíveis.

A forma fraca do problema, definida na eq. (4.6), pode ser expressa como: Encontrar  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \quad \mathbf{v} \in H_o \quad (4.9)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (4.10)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (4.11)$$

### 4.1.2 Condição necessária de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Aqui, a função Lagrangiana associada ao problema de otimização de leiaute considerado é dada por:

$$\begin{aligned}
 L(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_x, \mu_y) = & l(u) + \kappa \int_{\Omega} (\rho - \alpha) d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \lambda_i (\rho_{\inf} - \rho) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_s (\rho - \rho_{\sup}) d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \mu_x \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - C_x^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mu_y \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - C_y^2 \right] d\Omega + \\
 & - a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{w})
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

para  $\mathbf{u} \in H$ ,  $\mathbf{w} \in H_o$ ,  $\rho \in W^{1,\infty}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  e  $(\lambda_i, \lambda_s, \mu_x, \mu_y) \in (L_2)^4$ .

O problema associado de ponto de sela pode ser formulado como: Determinar  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_x, \mu_y)$ , com  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda_s \geq 0$ ,  $\mu_x \geq 0$  e  $\mu_y \geq 0$ , tal que

$$L(\rho, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_s, \hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y) \leq L(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_x, \mu_y) \leq L(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_x, \mu_y) \tag{4.13}$$

para todo  $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_s, \hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y)$  com  $\hat{\lambda}_i \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_s \geq 0$ ,  $\hat{\mu}_x \geq 0$  e  $\hat{\mu}_y \geq 0$ . Daí, as condições necessárias de ótimo podem ser determinadas como:

Da restrição de desigualdade à esquerda na eq. (4.13), é derivado que:

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega; \tag{4.14}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i (\rho_{\inf} - \rho) = 0, \quad \text{e} \quad \rho_{\inf} - \rho \leq 0; \tag{4.15}$$

$$\lambda_s \geq 0, \quad \lambda_s (\rho - \rho_{\sup}) = 0, \quad \text{e} \quad \rho - \rho_{\sup} \leq 0; \tag{4.16}$$

$$\mu_x \geq 0, \quad \mu_x \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - C_x^2 \right] = 0, \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - C_x^2 \leq 0; \tag{4.17}$$

$$\mu_y \geq 0, \quad \mu_y \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - C_y^2 \right] = 0, \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - C_y^2 \leq 0; \tag{4.18}$$

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{w}}) = l(\hat{\mathbf{w}}), \quad \forall \quad \hat{\mathbf{w}} \in H_o(\Omega). \tag{4.19}$$

Além disso, da restrição de desigualdade à direita na eq. (4.13), é derivado que:

$$a(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}), \quad \forall \quad \hat{\mathbf{u}} \in H_o(\Omega), \tag{4.20}$$

$$\kappa - \lambda_i + \lambda_s - \left[ \frac{\partial \mathbf{D}^H(\rho)}{\partial \rho} \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \operatorname{div}([H] \nabla \rho) = 0, \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.21)$$

e

$$[H] \nabla \rho \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ em } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (4.22)$$

onde,  $[H]$  é definido como:

$$[H] = \begin{bmatrix} 2\mu_x & 0 \\ 0 & 2\mu_y \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### 4.1.3 Modelos de microestruturas

Neste capítulo são testados dois modelos de microestruturas distintas, que são:

#### (i) O modelo de concentração de vazios de tamanho finito

Aqui, é considerado o modelo proposto por Chickermane & Gea (1997). A equação constitutiva homogeneizada associada ao modelo é derivada da teoria de campo médio de Mori-Tanaka e do princípio da equivalência de Eshelby, com sua solução para uma inclusão elipsoidal, a qual consiste de uma simples expressão analítica que é função da densidade relativa do material. Além disso, este modelo é caracterizado por um material poroso, o qual, é constituído de microvazios esféricos embutidos em uma matriz sólida, como ilustrado na Fig. 2.2.

Agora, considerando o coeficiente de Poisson, para o material completamente denso, como sendo  $\nu_o = 1/3$  e denotando  $E_o$  e  $G_o$  como sendo respectivamente o módulo de Young e o módulo de cisalhamento do material completamente denso, obtêm-se:

$$E(\rho) = \frac{\rho E_o}{(2 - \rho)} ; \quad (4.24)$$

$$G(\rho) = \frac{8 \rho G_o}{(15 - 7\rho)} . \quad (4.25)$$

Uma melhora na taxa de convergência do algoritmo, para a determinação do leiaute ótimo, foi obtida com a introdução de uma equação constitutiva efetiva penalizada, como proposto por Kikuchi *et al.* (1995), a qual é derivada através da



composição dos mapeamentos em (4.24) e (4.25) com um mapeamento não linear  $\varpi : \rho \rightarrow \varpi(\rho)$ , dado por

$$\varpi(\rho) = 1 + \varsigma - \sqrt{1 + 2\varsigma + 2\varsigma^2 - (\rho + \varsigma)^2}, \quad \varsigma > 0. \quad (4.26)$$

Como resultado, é derivado que:

$$\tilde{E}(\rho) = \frac{\varpi(\rho) E_o}{(2 - \varpi(\rho))} ; \quad (4.27)$$

$$\tilde{G}(\rho) = \frac{8\varpi(\rho) G_o}{(15 - 7\varpi(\rho))} . \quad (4.28)$$

Nesta formulação é empregado  $\varsigma = 0,02$ . Note que, desde que estas propriedades materiais homogeneizadas satisfaçam os limites de Hashin-Shtrikman, ver Bendsoe & Sigmund (1999), o modelo penalizado possibilitará uma realização física do leiaute ótimo em regiões com densidades intermediárias, i.e., será possível obter uma realização física para todas as soluções factíveis do problema de otimização de leiaute.

## (ii) O modelo SIMP

Neste modelo, cuja denominação advém de *Solid Isotropic Material with Penalty*, a descrição das propriedades materiais, nos pontos com densidade relativa intermediária, é baseada na relação constitutiva para materiais porosos. Sendo assim, o módulo de Young efetivo, para uma densidade relativa intermediária,  $E(\rho)$ , é descrito por:

$$E(\rho) = \rho^\eta E_o, \quad (4.29)$$

no qual  $E_o$  representa o módulo de Young do material sólido e  $\eta$  denota o parâmetro de penalidade. Este parâmetro penaliza regiões com densidades intermediárias resultando em leiautes ótimos com reduzidas regiões de densidade intermediária. Aqui, é considerado, como sugerido por Bendsoe & Sigmund (1999), o seguinte parâmetro de penalidade,  $\eta = 4$ . Além do mais, de acordo com Bendsoe & Sigmund (1999), para  $\eta \geq 3$  pode-se determinar uma microestrutura a qual representa uma realização física de um material composto, cuja equação constitutiva homogeneizada reproduz as propriedades do material poroso no ponto considerado.

## 4.2 Processo de discretização do problema

Para discretização da equação de estado, associada ao problema de otimização, é aplicado o método dos elementos finitos de Galerkin. Mais especificamente, é considerado um elemento finito Tri3 que interpola tanto as componentes de deslocamento  $(u, v)$  como a densidade relativa  $\rho$ , de acordo com a ilustração da Fig. 4.1.

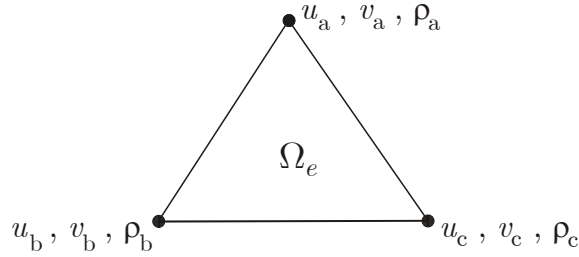


Figura 4.1: Discretização do elemento finito para problemas 2D.

No modelo empregado, as variáveis de projeto ficam definidas como sendo a densidade relativa dos nós da malha de elementos finitos. Adicionalmente, devido à particularidade da interpolação adotada, tanto o gradiente da densidade relativa  $\nabla \rho$ , como o tensor deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , são constantes no interior de cada elemento finito. Note porém que, como a equação constitutiva homogeneizada é da forma  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , o campo de tensão resultante será variável no interior de cada elemento.

Como o objetivo neste capítulo é combinar um método eficiente de otimização de leiaute com um processo de refino  $h$ -adaptativo, a dimensão do problema de otimização resultante será de grande escala. Desta forma, a utilização de uma função de interpolação de baixa ordem é recomendável já que esta possibilita uma redução considerável do custo computacional necessário para a determinação do leiaute ótimo. Entretanto, vários problemas de instabilidade de tabuleiro têm sido observados, quando são utilizados elementos finitos de baixa ordem. Desta forma, com o objetivo de contornar estas instabilidades, considera-se a imposição de uma restrição do tipo caixa, aplicada às componentes do gradiente da densidade relativa, como proposto por Petersson & Sigmund (1998). Agora, já que  $\nabla \rho$  é constante no interior de cada elemento, impõe-se apenas que:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 \leq (C_x^e)^2; \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_e^2 \leq (C_y^e)^2, \quad e = 1, \dots, n_e, \quad (4.31)$$

onde  $n_e$  denota o número total de elementos finitos na malha.

#### 4.2.1 Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 4.2, sendo  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $p/ \ i = 1, \dots, 3$  as coordenadas dos vértices e  $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)$  as coordenadas do baricentro do elemento Tri3.

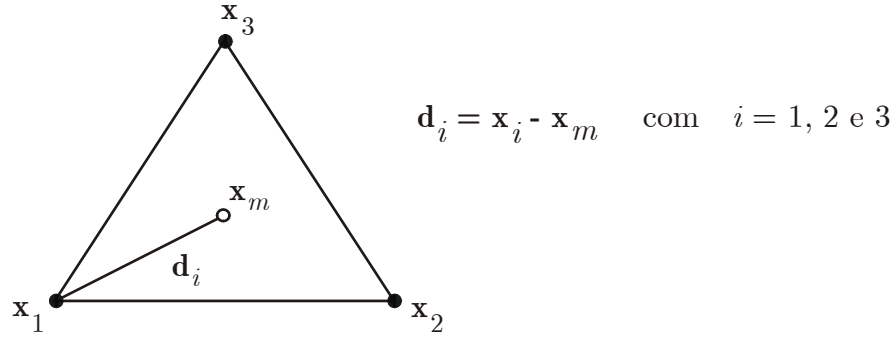


Figura 4.2: Coordenadas do elemento finito Tri3.

Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|\mathbf{d}_i\| \quad p/ \ i = 1, \dots, 3 \quad (4.32)$$

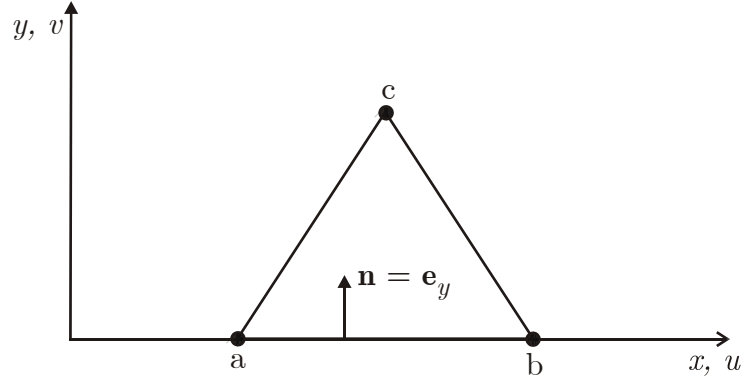
é definido que

$$C_x^e = C_y^e = \frac{1}{d_{\min}}. \quad (4.33)$$

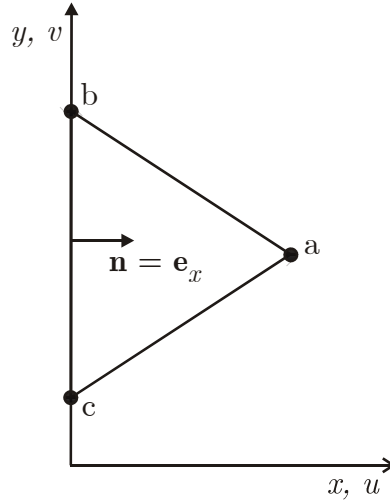
Uma modificação dos limites  $C_x^e$  e  $C_y^e$ , deve ser realizada se no mínimo uma das arestas do elemento coincide com algum eixo de simetria. Aqui, são considerados dois casos possíveis, que são:

##### (i) Eixo de simetria - $x$

Aqui, considera-se que a aresta  $\overline{ab}$  do elemento coincide com o eixo- $x$  de simetria. Neste caso, como ilustrado na Fig. 4.3, deve-se ter:  $v = 0$  e  $(\partial \rho / \partial y) = 0$ . Sendo assim, a imposição da última condição é alcançada denotando  $C_y^e = 0$ .

Figura 4.3: Condição de simetria no eixo- $x$ .**(ii) Eixo de simetria -  $y$** 

Agora, considera-se que a aresta  $\overline{bc}$  do elemento coincidente com o eixo- $y$  de simetria. Assim, de acordo com a ilustração na Fig. 4.4, deve-se ter:  $u = 0$  e  $(\partial \rho / \partial x) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $C_x^e = 0$ .

Figura 4.4: Condição de simetria no eixo- $y$ .**4.2.2 Formulação discreta do problema de otimização**

O problema discreto de otimização de leiaute pode ser formulado como: Determinar  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$  tal que é solução de:

$$\min f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) \quad (4.34)$$

sujeito a:

$$h(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} d\Omega - \alpha = 0; \quad (4.35)$$

$$g_{2e-1}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 - (C_x^e)^2 \right\} \leq 0; \quad (4.36)$$

$$g_{2e}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 - (C_y^e)^2 \right\} \leq 0; \quad (4.37)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$  e  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X}$ , com  $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\inf} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\sup}, i = 1, \dots, n\}$ . Aqui,  $n$  representa o número total de nós na malha de elementos finitos e é denotado que  $\beta = 1/d_{\max}$ , sendo que  $d_{\max}$  é definido como  $d_{\max} = \max_{i=1,3} \|\mathbf{d}_i\|$ . A função objetivo adimensional é dada por:  $f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) = \frac{1}{\beta_o} f_\rho(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}))$ , com  $\beta_o = f_\rho(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}_o))$ , para algum vetor de densidade relativa nodal  $\boldsymbol{\rho}_o$  adequado.

Para a solução do problema, definido por (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), aplica-se o Método do Lagrangiano Aumentado. Como resultado, formula-se o problema através da solução de uma seqüência de problemas de otimização com restrições laterais do tipo caixa. O procedimento geral pode ser resumido por:

- Denotar  $k = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$ ,  $erro = 1, 0$ ,  $\varepsilon^k$  e  $tol$ .
- Enquanto  $erro > tol$ , efetuar *laço*:

(i) Resolver o problema de minimização com restrições de caixa

$$\min \chi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \varepsilon^k), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X} \quad (4.38)$$

onde

$$\chi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \varepsilon^k) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\varepsilon^k} \sum_j \Psi_j(g_j(\boldsymbol{\rho}), \lambda_j^k, \varepsilon^k) + \frac{1}{2\varepsilon^k} h(\mathbf{x}) [h(\mathbf{x}) + 2\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}^k] \quad (4.39)$$

com

$$\Psi_j(g_j(\boldsymbol{\rho}), \lambda_j^k, \varepsilon^k) = \begin{cases} g_j(\boldsymbol{\rho}) [g_j(\boldsymbol{\rho}) + 2\varepsilon^k \lambda_j^k], & \text{se } g_j(\boldsymbol{\rho}) \geq -\varepsilon^k \lambda_j^k \\ -(\varepsilon^k \lambda_j^k)^2, & \text{se } g_j(\boldsymbol{\rho}) < -\varepsilon^k \lambda_j^k \end{cases}. \quad (4.40)$$

Denotar a solução por  $\boldsymbol{\rho}^k$ .

(ii) Atualizar o multiplicador de Lagrange

$$\lambda_j^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_j^k + \frac{1}{\varepsilon^k} g_j(\boldsymbol{\rho}^k) \right\} \quad (4.41)$$

e

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \frac{1}{\varepsilon^k} h(\mathbf{p}^k) \quad (4.42)$$

(iii) Calcular o *erro*

$$e_1 = \max_j \left\{ \frac{|\lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k|}{\max\{1, \lambda_j^{k+1}\}} \right\}, \quad (4.43)$$

$$e_2 = \frac{|\mu^{k+1} - \mu^k|}{\max\{1, \mu^{k+1}\}}, \quad (4.44)$$

onde

$$erro = \max\{e_1, e_2\} \quad (4.45)$$

(iv) Atualizar o parâmetro de penalidade

$$\varepsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \varepsilon^k, & \text{se } \varepsilon^{k+1} < \varepsilon_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0,1) \\ \varepsilon_{crit}, & \text{se } \varepsilon^{k+1} \geq \varepsilon_{crit} \end{cases} \quad (4.46)$$

• Fim do *laço*

O problema de otimização sujeito às restrições de caixa é resolvido pelo método de quase-Newton projetado sem memória (ver apêndice A).

## 4.3 Refino da malha com adaptatividade $h$

### 4.3.1 Descrição geral do método

Nesta seção é apresentada uma descrição geral do processo, o qual combina o método de otimização topológica com as estratégias de refino  $h$ -adaptativo da malha. As características mais relevantes desta nova abordagem são:

- (i) A capacidade de proporcionar alta resolução do contorno material, de modo a obter leiautes ótimos com maior nitidez;
- (ii) A redução da dependência do leiaute ótimo final com a malha inicial;
- (iii) A redução considerável do número total de variáveis de projeto, considerando a qualidade da resolução do leiaute ótimo final;
- (iv) A diminuição do erro da solução da equação de estado.

No processo proposto, o número total de níveis de refino  $h$ -adaptativo a ser considerado é definido de modo prescrito, e em cada nível de refino é resolvido um problema de otimização de leiaute. Uma descrição geral do processo é dada a seguir:

1. Ler os dados da malha de elementos finitos e gerar a estrutura de dados inicial.
2. Ler o valor inicial das variáveis de projeto.
3. Para cada nível de refino, fazer:
  - 3.1. Resolver o problema de otimização de leiaute.
  - 3.2. Aplicar o processo de refino  $h$ -adaptativo à malha:
    - 3.2.1. Ler a estrutura de dados da malha.
    - 3.2.2. Efetuar o refino  $h$ -adaptativo da malha:
      - 3.2.2.1. Identificar o conjunto dos elementos a serem refinados.
      - 3.2.2.2. Efetuar o refino destes elementos e introduzir os elementos de transição necessários para assegurar a compatibilidade da malha.
      - 3.2.2.3. Aplicar o processo de suavização Laplaciano condicional para melhorar a qualidade da malha.
    - 3.2.3. Otimizar a incidência nodal do elemento de acordo com o esquema de armazenamento do algoritmo de solução do sistema linear utilizado.
    - 3.2.4. Atualizar a malha e a estrutura de dados dos elementos finitos.

#### 4.3.2 Estratégia de refino da malha

A estratégia consiste basicamente na identificação de um conjunto de elementos a serem refinados, de acordo com a ilustração nas Figs. 4.5(a,b). Em seguida, o processo de refino é complementado pela introdução dos necessários elementos de transição, como mostrado nas Figs. 4.6(a,b), para manter a compatibilidade da malha, ver George & Borouchaki (1997) e Carey (1997).

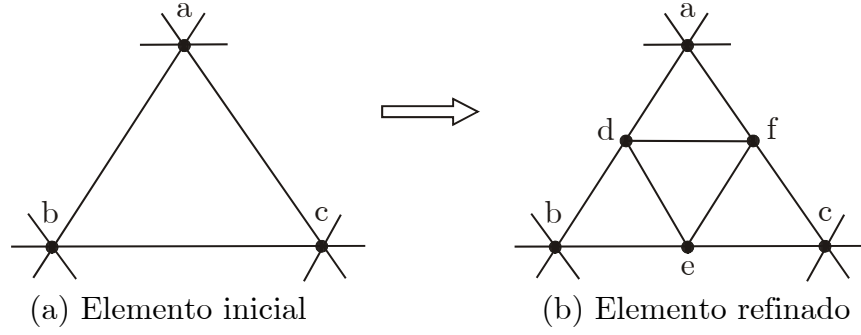


Figura 4.5: Estratégia de refino para elementos Tri3.

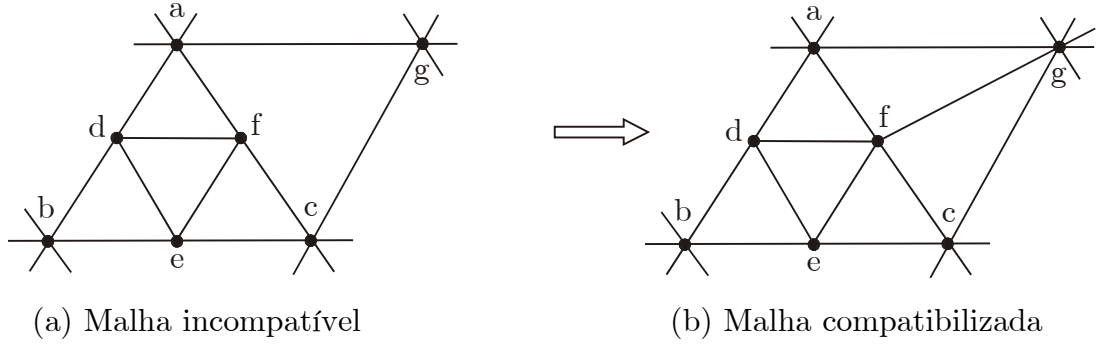


Figura 4.6: Elemento de transição compatibiliza a malha (caso Tri3).

O conjunto de elementos é determinado com a utilização de um vetor de ponteiro auxiliar:  $Pref(e)$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ . O valor inicial do vetor de ponteiro para todos os elementos é  $Pref(e) = 0$ , isto representa que a princípio nenhum elemento será refinado. Entretanto, se  $Pref(e) = 1$ , então o  $e$ -ésimo elemento será refinado. Para facilitar a descrição do processo, são apresentadas as seguintes definições:

- **Elemento Material:** um dado elemento é definido como sendo material, se a sua densidade relativa no baricentro  $\rho^{bar}$  é tal que  $\rho^{bar} \in [0, 4, \rho^{sup}]$ . Por outro lado, no caso em que  $\rho^{bar} \in [\rho^{inf}, 0, 4)$ , o elemento é definido como sendo não-material.
- **Contorno Material:** é definido como contorno material ou ainda perfil material, o contorno formado pelas arestas que são comuns a um elemento material e a um elemento não-material.

Este procedimento pode ser descrito como segue:

1. Denotar  $Pref(e) = 0$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ .
2. Para cada elemento, determinar a densidade relativa no baricentro  $\rho_e^{bar}$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ . Caso  $(\rho_e^{bar} \geq 0, 4)$ , então o  $e$ -ésimo elemento é definido como um elemento material, e é denotado que  $Pref(e) = 1$ . Caso contrário, o  $e$ -ésimo



elemento é definido como um elemento não-material. Assim, neste passo são identificados os elementos materiais que serão refinados.

3. Determinar o erro médio dos elementos e o erro médio global denotados respectivamente por  $\Theta_e$  e  $\Theta_G$ ,  $e = 1, \dots, n_e$ . Agora, se  $\Theta_e > (1 + \varphi)\Theta_G$ , para um dado  $\varphi > 0$ , redefine-se o valor do ponteiro para  $Pref(e) = 1$ , ou seja, o  $i$ -ésimo elemento será refinado. Aqui, é utilizado  $\varphi = 0,8$  e as medidas de erro estão definidas na subseção (Estimador de erro).
4. Determinar a medida de qualidade  $Q(e)$  de cada elemento,  $e = 1, \dots, n_e$ , a qual é definida por

$$Q(e) = \frac{6A_e}{\sqrt{3} L_{\max}^e P_e} \quad (4.47)$$

onde

$A_e$  é a área do elemento triangular,

$P_e$  é a metade do perímetro do elemento triangular,

$L_{\max}^e = \max\{\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}\}$  é o comprimento da maior aresta do triângulo.

Daí, se  $Q(e) \leq 0,55$ , redefine-se o valor do ponteiro para  $Pref(e) = 1$ . Assim, todos os elementos distorcidos são refinados.

5. Identificar todos os elementos não-materiais que têm pelo menos uma aresta pertencente ao contorno material e denotar os respectivos ponteiros  $Pref(\cdot) = 1$ , ou seja, todo e qualquer elemento não-material que possui pelo menos um elemento material como vizinho também será refinado.
6. Executar um critério adicional de suavização ao refino: para cada elemento cujo ponteiro denota  $Pref(e) = 0$  deve-se identificar os elementos vizinhos. Se o elemento tem dois ou mais vizinhos com os respectivos ponteiros denotando  $Pref(\cdot) = 1$ , então refinar o dado elemento, i.e., denotar  $Pref(e) = 1$ . O objetivo aqui é evitar que um dado elemento não refinado tenha dois ou mais vizinhos não refinados. Isto pode ocasionar: o aparecimento de “cantos vivos” no contorno material; a introdução de regiões não-materiais na topologia diminuindo a qualidade da resolução. Sendo assim, estes elementos também devem ser refinados.

### 4.3.3 Processo de suavização condicional Laplaciano

Para melhorar a qualidade da malha, depois do passo de refino, emprega-se um processo de suavização denominado por Laplaciano condicional, o qual é ilustrado pelas Figs. 4.7(a,b), sendo que  $n_v$  denota o número de nós dos vértices adjacentes associado com o nó  $\mathbf{x}_n$ . O processo de suavização é aplicado, em ordem crescente, a todos os nós dos vértices que estão no interior da malha.

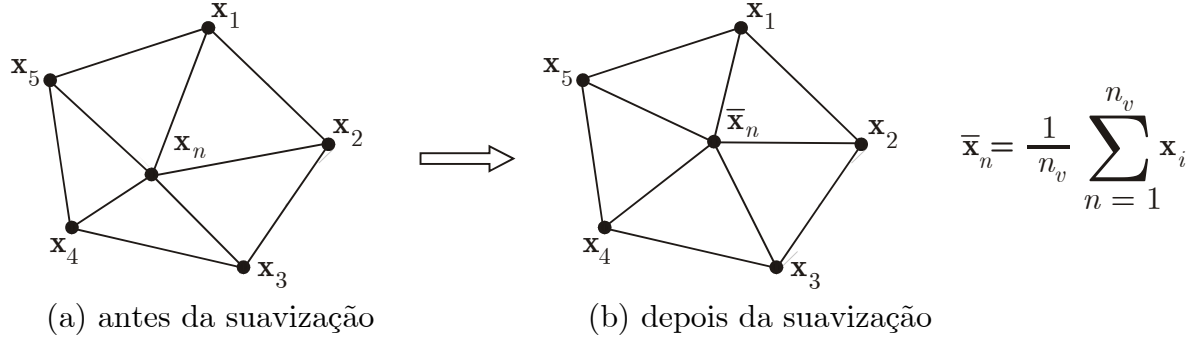


Figura 4.7: Processo de suavização Laplaciano em elementos Tri3.

Observe que os nós do contorno são mantidos fixos. O processo Laplaciano é condicional, portanto, ele somente será aplicado se a qualidade da malha do conjunto de elementos melhorar. A qualidade de um conjunto de elementos é definida como sendo a qualidade do pior elemento do conjunto. A medida da qualidade do elemento é dada pela eq. (4.47). Ao aplicar o processo de suavização Laplaciano, uma nova posição *teste* do nó  $\mathbf{x}_n$  é determinada, a qual é denotada por  $\bar{\mathbf{x}}_n$ , entretanto, o nó  $\mathbf{x}_n$  só será movido para a nova posição *teste* se a qualidade da malha não diminuir.

### 4.3.4 Estimador de erro

Aqui, foi feito uso do estimador de erro proposto por Zienkiewicz & Zhu (1990 e 1991), o qual é baseado numa técnica de recuperação do gradiente por meio da norma da energia Babuska *et al.* (1986), Georges & Shephard (1991), Bugeda (1991) e Wilberg & Abdulwahab (1997). Sendo  $\boldsymbol{\rho}$  uma dada densidade relativa nodal realizável do problema. Então, o erro local do deslocamento pode ser definido como:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.48)$$

onde  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$  e  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})$  correspondem respectivamente à solução exata e à solução aproximada. Então, a norma da energia pode ser escrita como:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (4.49)$$

Agora, o erro local da tensão pode ser expresso em termos do erro local do deslocamento como segue:

$$\mathbf{e}_{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})) = \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})). \quad (4.50)$$

Sendo assim, a norma da energia pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (4.51)$$

Como a distribuição de tensão exata é desconhecida, aproxima-se  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})$  por uma solução melhorada  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$ , a qual é mais refinada que  $\boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})$ . Daí, o indicador de erro é aproximado por:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (4.52)$$

#### 4.3.5 Determinação de $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$

Para a determinação da solução melhorada  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$ , aplica-se a técnica de projeção proposta por Zienkiewicz & Zhu (1990 e 1991), que é baseada no fato de que a solução do campo de deslocamento aproximada pelo elemento finito  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \in C^0(\Omega)$  mas o campo de tensão resultante é apenas contínuo por partes. A determinação de  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  consiste na solução por mínimos quadrados do potencial  $\psi(\boldsymbol{\rho})$ , sendo

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (4.53)$$

Aqui,  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  é interpolado dentro de cada elemento como

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{j=1}^{n_d} N_j \bar{\boldsymbol{\sigma}}_j^*, \quad (4.54)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_j^*$  é o tensor tensão avaliado no  $j$ -ésimo nó do elemento, e  $N_j$  são as funções clássicas de interpolação usadas na interpolação do campo de deslocamentos.

Agora, uma vez que  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  é determinado, pode-se calcular o erro médio global  $\Theta_G$ , como

$$\Theta_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega; \quad (4.55)$$

o erro médio do elemento  $\Theta_e$ , como

$$\Theta_e = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega_e. \quad (4.56)$$

A estratégia adotada para verificar, se um dado elemento deve ser refinado, devido ao critério de erro medido, é dada por: se  $\Theta_e > (1 + \varphi)\Theta_G$ , com  $\varphi > 0$ , então refina-se o elemento.

## 4.4 Resultados

Aqui, são apresentados algumas aplicações com o objetivo de avaliar a performance do procedimento proposto. Para mostrar a evolução da estratégia de refino são ilustrados alguns dos leiautes ótimos intermediários e suas malhas de elementos finitos associadas. Além do mais, por simplicidade, foi empregado o mesmo material em todos os casos. O módulo de Young  $E_o = 215,0$  GPa e o coeficiente de Poisson  $\nu_o = \frac{1}{3}$ .

### Problema 4.1:

Considere o problema ilustrado na Fig. 4.8, o qual consiste em uma placa fixada no arco circular interno e submetida a uma carga prescrita vertical  $\mathbf{P} = 60,0 \times 10^6$  N aplicada no meio do lado direito. O leiaute ótimo é submetido a uma restrição de volume  $\alpha = 0,15$  (clássico problema estrutural de Michell). Neste caso, foram consideradas duas diferentes microestruturas, as quais são os modelos de microestruturas SIMP e de Gea.

A primeira sequência de malhas, resultante do processo de refino  $h$ -adaptativo utilizando o modelo de microestrutura de Gea, é descrita como segue: A malha inicial, com 2152 elementos e 1165 nós, está ilustrada na Fig. 4.8(a); A segunda malha refinada, com 4558 elementos e 2380 nós, está ilustrada na Fig. 4.8(b); A malha refinada final, com 11263 elementos e 5751 nós, está ilustrada na Fig. 4.8(c).

Além disso, a segunda sequência de malhas, empregando o modelo de microestrutura do tipo SIMP, é descrita como segue: A malha inicial, com 2152

elementos e 1165 nós, está ilustrada na Fig. 4.9(a); A segunda malha refinada, com 4418 elementos e 2311 nós, está ilustrada na Fig. 4.9(b); A malha refinada final, com 10748 elementos e 5497 nós, está ilustrada na Fig. 4.9(c).

A evolução dos leiautes ótimos parciais, mostrando o melhoramento da resolução do contorno material, resultante dos processos de refino do tipo  $h$ -adaptativo, está ilustrada nas Figs. 4.8(a-c) para o modelo de microestrutura de Gea e nas Figs. 4.9(a-c) para o modelo de microestrutura do tipo SIMP. Note que em ambos os casos podem ser observados uma variação entre diferentes leiautes ótimos parciais. Isto sugere uma possível dependência do leiaute ótimo com relação ao tamanho da malha inicial. Entretanto, os resultados têm indicado que a seqüência de leiautes ótimos parciais tende a convergir para um leiaute ótimo final com a aplicação sucessiva do processo de refino do tipo  $h$ -adaptativo.

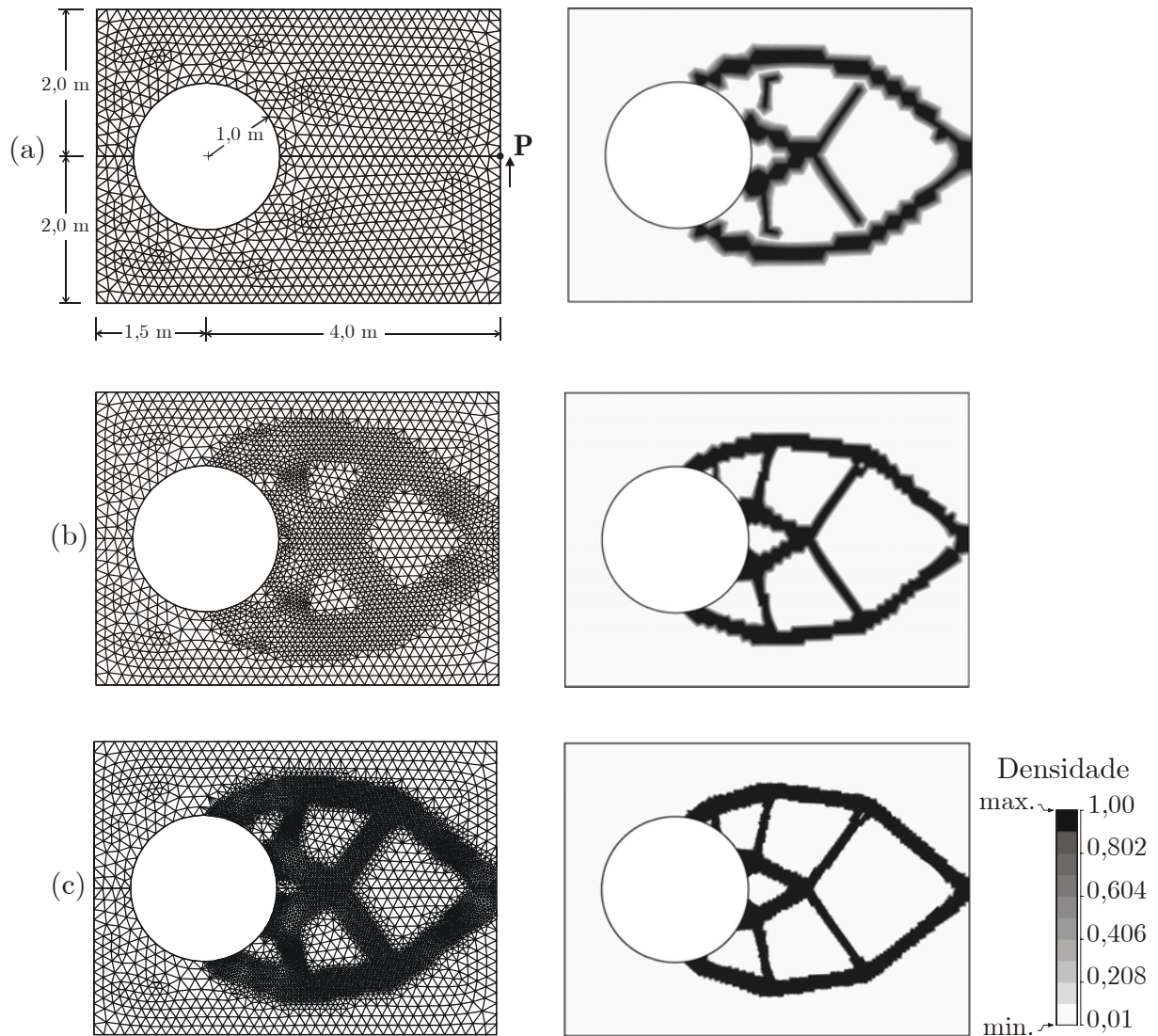


Figura 4.8: Estrutura de Michell, utilizando microestrutura de Gea.

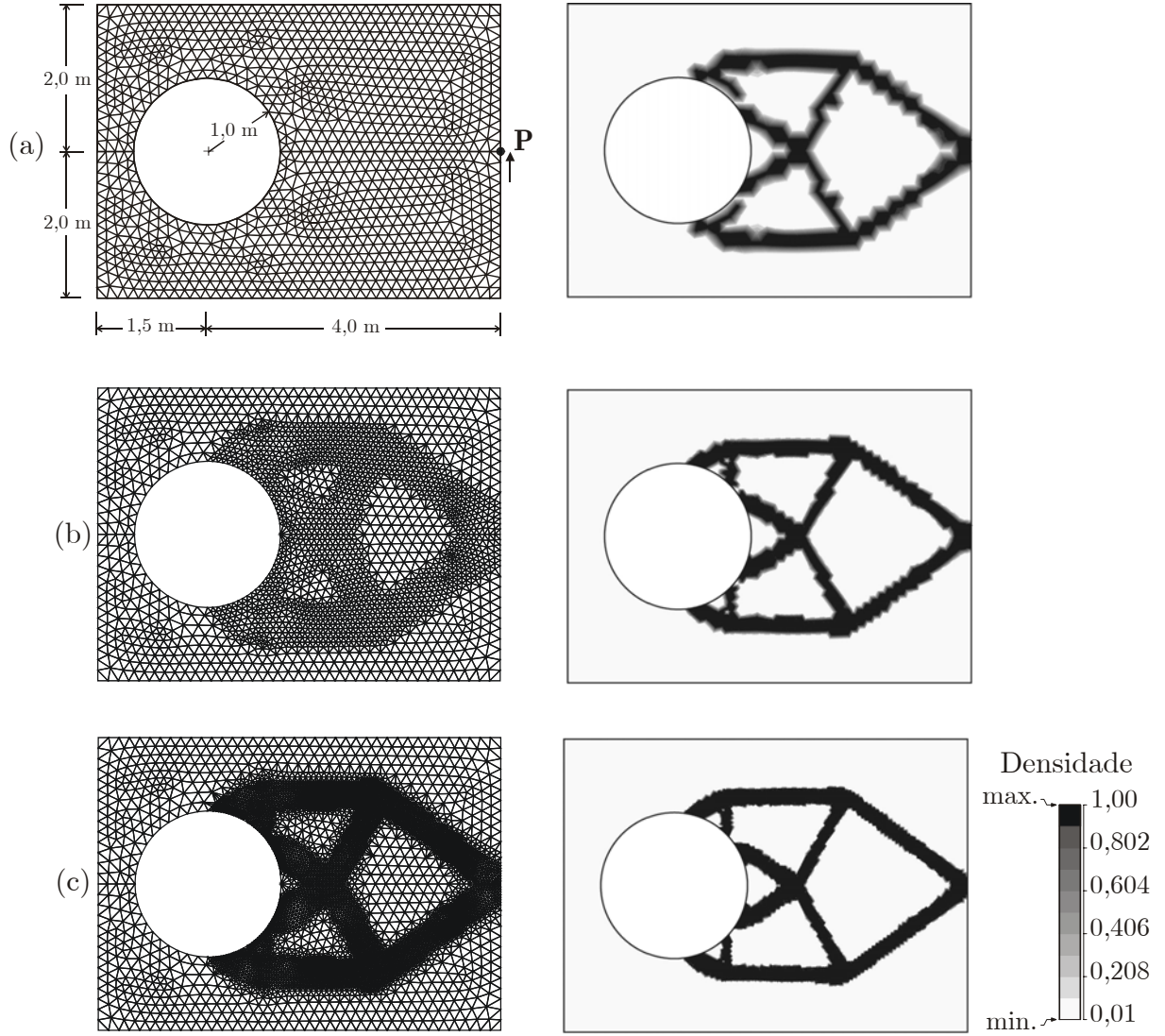


Figura 4.9: Estrutura de Michell, utilizando microestrutura SIMP.

### Problema 4.2:

Aqui, é considerado o problema indicado na Fig. 4.10(a), que consiste em uma placa com um furo circular, a qual é submetida a duas cargas concentradas  $\mathbf{P}$  com direções opostas, aplicadas no meio das bordas esquerda e direita. Neste caso é feito uso do modelo da microestrutura de Gea. A placa está sujeita à condição de estado plano de tensões, sob uma carga prescrita  $\mathbf{P}=80,0 \times 10^6$  N, e restrita a uma fração de volume  $\alpha = 0,20$ . Os leiautes ótimos parciais, resultantes do processo de refinamento  $h$ -adaptativo, estão ilustrados nas Figs. 4.10(a), com 431 elementos e 244 nós; 4.10(b), com 2118 elementos e 1111 nós; e 4.10(c), com 20982 elementos e 10606 nós.

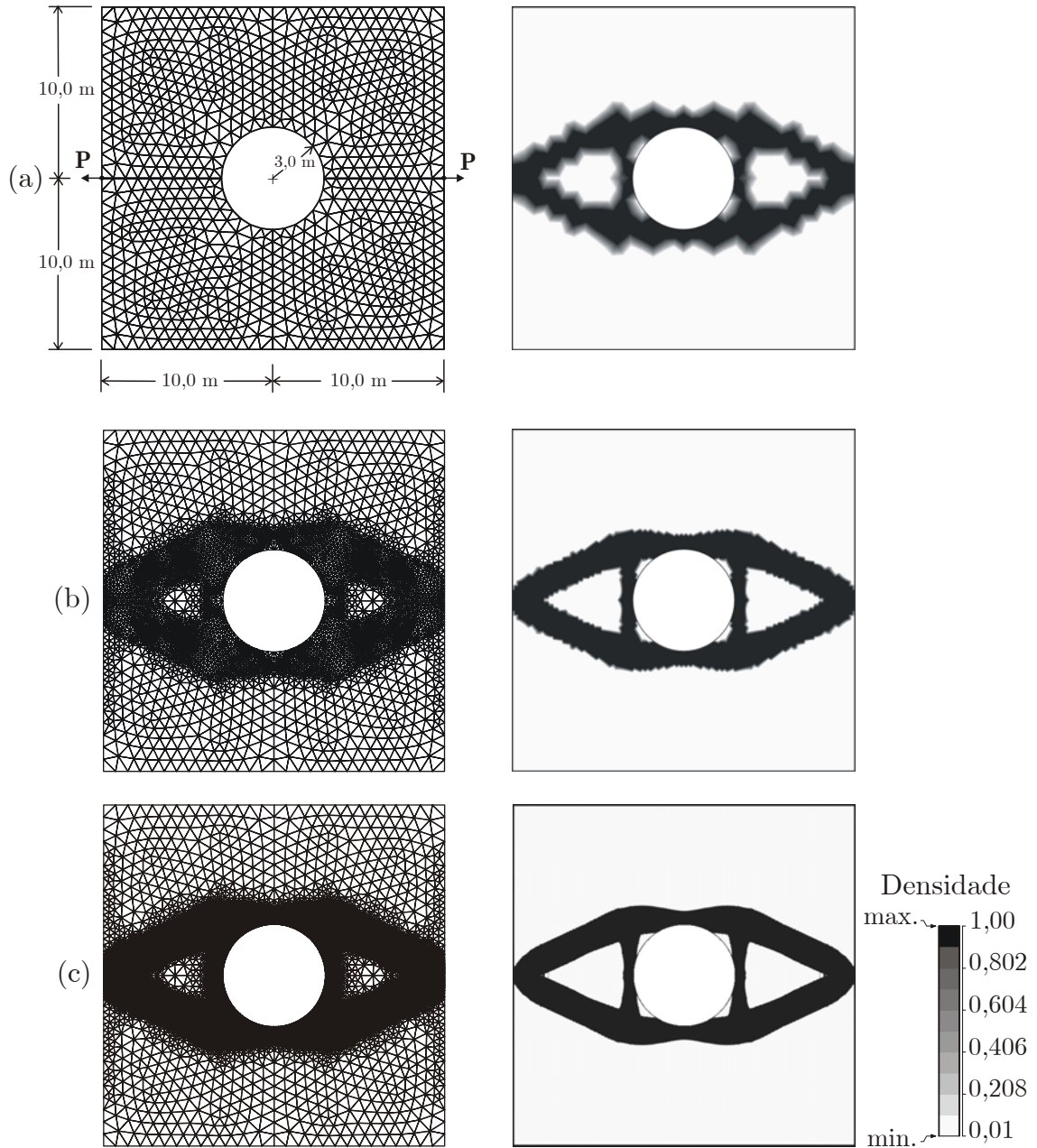


Figura 4.10: Placa com furo, utilizando microestrutura de Gea.

Devido às condições de simetria, apenas um quarto do domínio foi utilizado para modelar o problema.

### Problema 4.3:

O problema a ser resolvido aqui está ilustrado na Fig. 4.11(a), o qual consiste em uma placa fixada na lateral superior, e submetida a uma força cisalhante  $P=55,0 \times 10^6$  N no meio da lateral inferior. A placa está sujeita à condição de tensão plana e restrita a uma fração de volume  $\alpha = 0,25$ . Aqui, é utilizada a microestrutura de Gea e são considerados cinco níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos. Os leiautes ótimos



parciais resultantes do processo de refino são ilustrados nas Figs. 4.11(a), com 456 elementos e 259 nós; 4.11(b) representando o terceiro nível de refino, com 3317 elementos e 1715 nós; e 4.11(c) representando o quinto nível de refino, com 33399 elementos e 16823 nós.

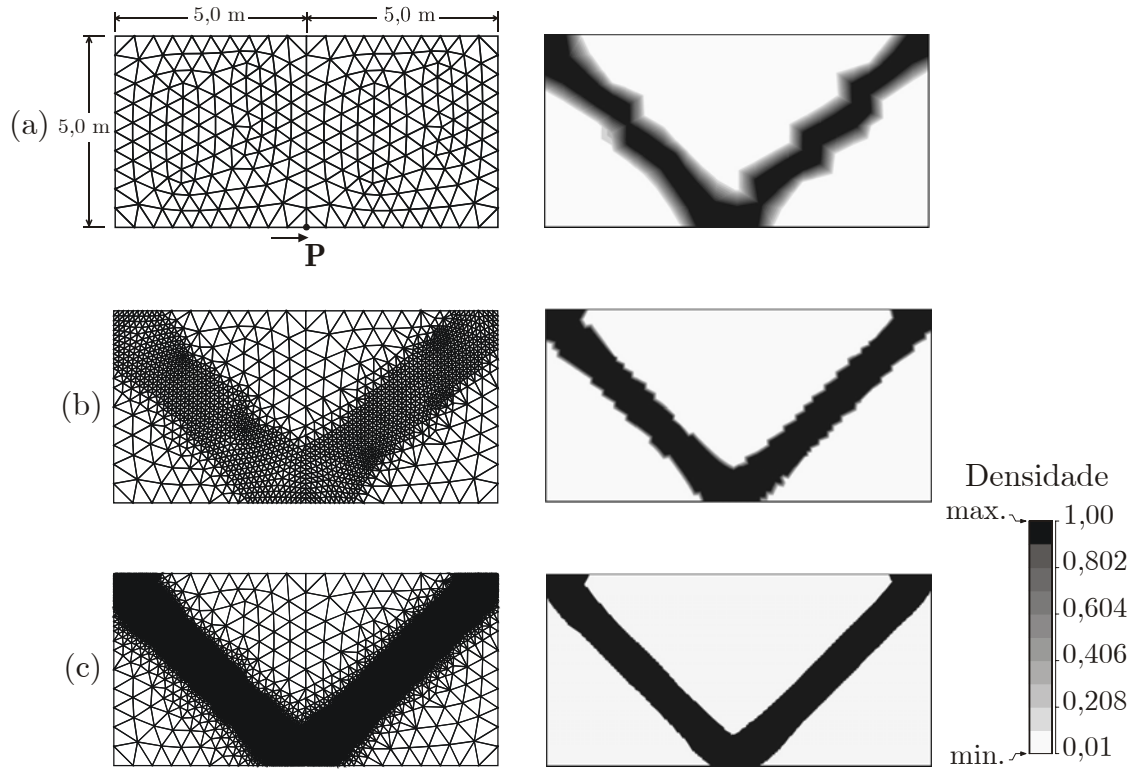


Figura 4.11: Placa com carga cisalhante, utilizando microestrutura de Gea.

Neste exemplo pode ser notada uma melhora considerável na definição do contorno material, com a aplicação de um total de cinco níveis de refino  $h$ -adaptativo.

#### Problema 4.4:

Neste exemplo foi considerado o problema ilustrado na Fig. 4.12(a), que consiste em uma viga em balanço, fixada na borda lateral esquerda, submetida a uma carga concentrada transversal  $\mathbf{P}=60,0 \times 10^6$  N. Neste exemplo, foi prescrita uma fração de volume  $\alpha = 0,35$  e foram consideradas ambas as microestruturas. A primeira seqüência de malhas, mostrada nas Figs.: 4.12(a), com 4218 elementos e 2210 nós; 4.12(b), com 12022 elementos e 6186 elementos; e 4.12(c), com 36804 elementos e 18719 nós, refere-se à microestrutura de Gea. A segunda seqüência, mostrada nas Figs.: 4.13(a), com 4218 elementos e 2210 nós; 4.13(b), com 11620 elementos e 5982 nós, e 4.13(c), com 35354 elementos e 17983 nós, refere-se agora ao modelo de microestrutura SIMP.



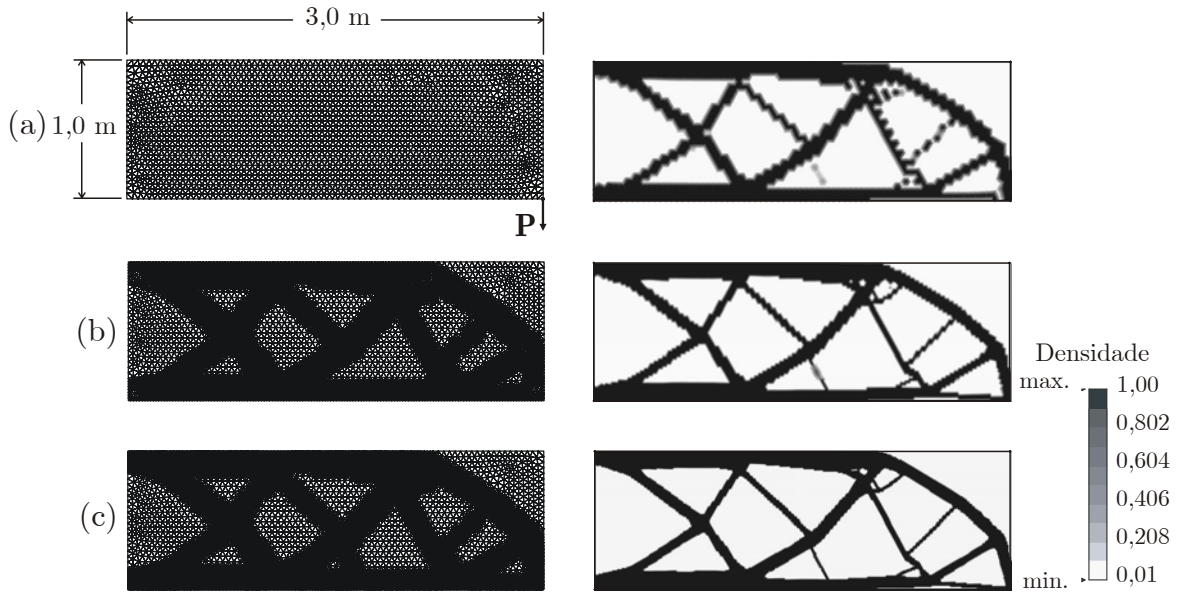


Figura 4.12: Viga em balanço, utilizando microestrutura de Gea.

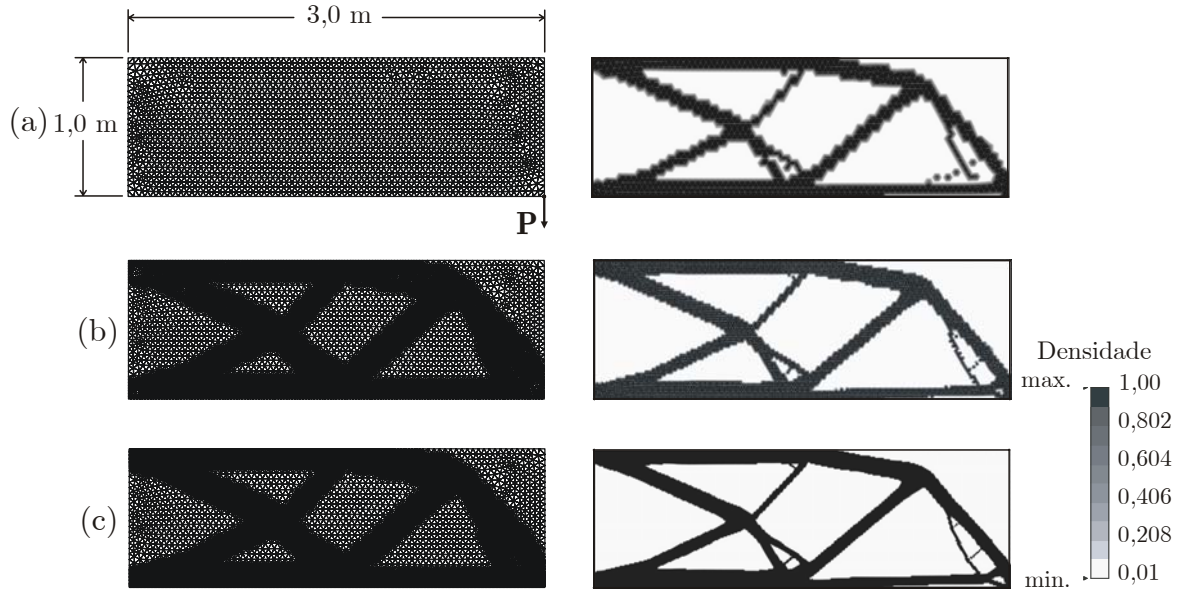


Figura 4.13: Viga em balanço, utilizando microestrutura SIMP.

Neste exemplo também pode ser visto uma alteração dos leiautes ótimos parciais, sugerindo uma possível dependência de malha do leiaute ótimo. Novamente, pode ser visto que com a aplicação de uma sequência de níveis de refinamentos  $h$ -adaptativos, o leiaute tende a convergir para um leiaute ótimo final do problema.

#### Problema 4.5:

O problema considerado neste caso, ilustrado na Fig. 4.14(a), representa uma viga L, fixada na borda da lateral superior. A viga é submetida a uma carga concentrada  $\mathbf{P}=60,0 \times 10^6$  N no meio da borda lateral direita e a uma fração de volume prescrita  $\alpha = 0,25$ . Neste caso, também foram consideradas as duas

microestruturas. A primeira sequência de malhas, mostrada nas Figs.: 4.14(a), com 4550 elementos e 2387 nós 4.14(b), com 11397 elementos e 5877 nós e 4.14(c), com 32057 elementos e 16324 nós, refere-se à microestrutura de Gea. A segunda sequência, mostrada nas Figs.: 4.15(a), com 4550 elementos e 2387 nós; 4.15(b), com 11199 elementos e 5775 nós; 4.15(c), com 31165 elementos e 15875 nós, refere-se ao modelo de microestrutura SIMP.

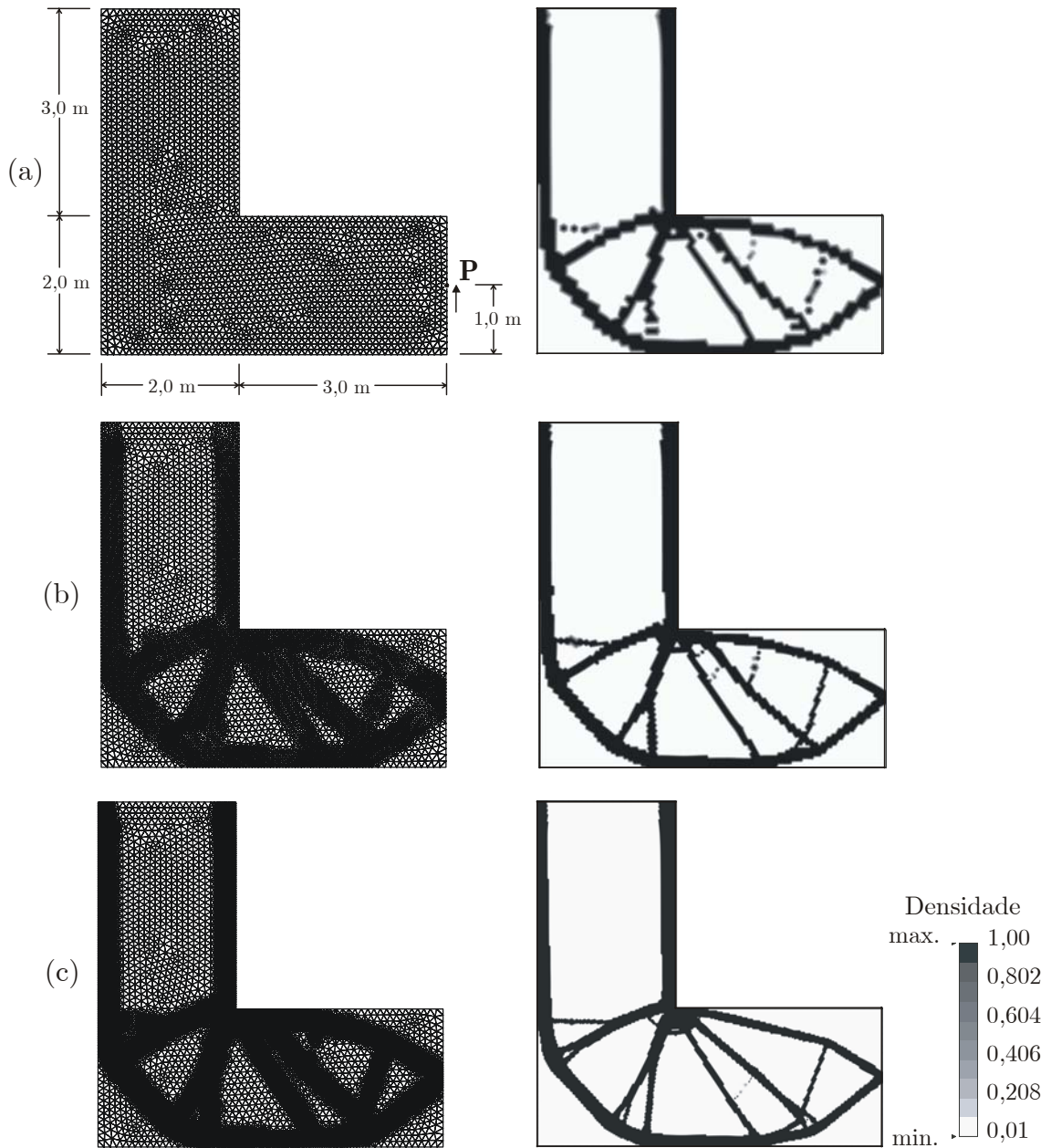


Figura 4.14: Viga L, utilizando microestrutura de Gea

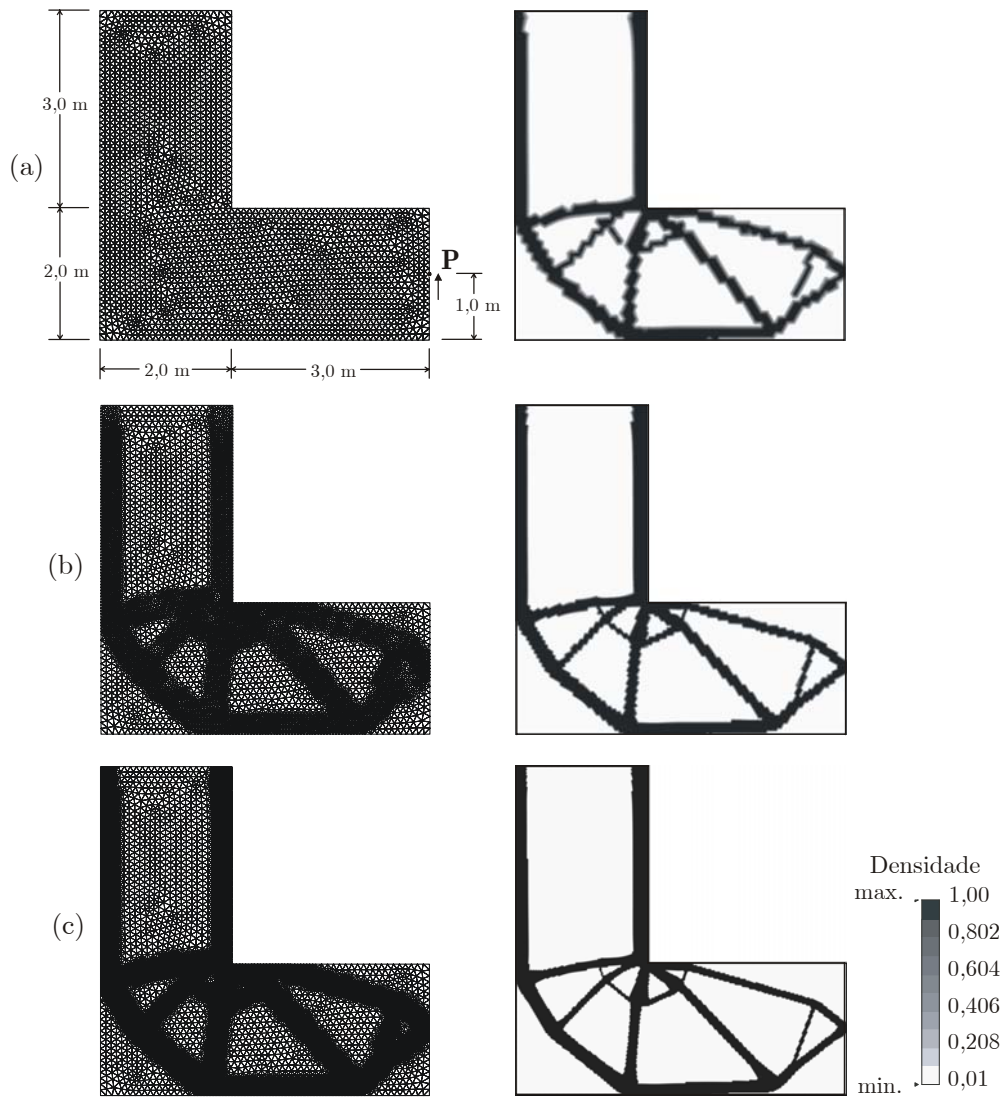


Figura 4.15: Viga L, utilizando microestrutura SIMP

A evolução dos leiautes ótimos parciais mostra uma considerável melhora da definição da interface material/vazio descrevendo a forma ótima associada ao leiaute ótimo final. Daí, a utilização de uma estratégia de refino  $h$ -adaptativo resulta não somente na descrição do leiaute ótimo, como também na definição da forma ótima da estrutura.

## 4.5 Conclusão

A abordagem combinada, de otimização de leiaute com o processo de refino do tipo  $h$ -adaptativo, mostra ser muito efetiva e robusta na geração de um leiaute ótimo nítido, com uma refinada definição da forma ótima da estrutura. Também, é verificada uma significativa redução do número total de variáveis de projeto, para uma resolução final especificada, quando comparada a discretizações do tipo *pixel*. A

utilização de um elemento de interpolação de baixa ordem, Tri3, em conjunto com a aplicação de restrições laterais às componentes do gradiente da densidade relativa, possibilitou o desenvolvimento de um algoritmo com alta performance computacional, robusto e estável, i.e., sem problemas de instabilidade do tipo tabuleiro de damas. Além disso, a partir dos resultados apresentados neste capítulo, pode-se supor uma dependência do leiaute ótimo com relação à malha inicial. Entretanto, os resultados indicam que o processo de refino do tipo  $h$ -adaptativo gera uma sequência de leiautes ótimos que tendem a convergir para um leiaute ótimo final.

A introdução de uma medida da qualidade do elemento e de um estimador de erro foram necessários para minimizar a deterioração da malha e para limitar erro da solução mediante a aplicação do processo  $h$ -adaptativo.

A abordagem combinada proposta resultou em uma ferramenta muito promissora para a determinação do leiaute ótimo de problemas com formulações de flexibilidade mínima em estruturas bidimensionais. Embora o custo de avaliação da função objetivo seja mais alto que o custo obtido com a utilização da abordagem do tipo *pixel*, a enorme diminuição do número de variáveis de projeto compensa o aumento do custo de avaliação da função objetivo. Além disso, se o objetivo é desenvolver ferramentas de projeto de utilização comercial, é uma exigência primária que o contorno material seja indubitavelmente definido e que o leiaute ótimo final seja, tanto quanto possível, independente da malha inicial.

## Capítulo 5

# Placas de Mindlin-Reissner sob Minimização da Flexibilidade Utilizando Elementos Tri3

### 5.1 Introdução

Com o objetivo de encontrar topologias ótimas no projeto de estruturas, Bendsoe & Kikuchi (1988) propuseram o método (OBH), otimização baseada na teoria de homogeneização, originalmente denotado no inglês como *Homogenization-Based Optimization*. No método OBH, a otimização topológica é definida como um problema de redistribuição material no domínio de projeto, sendo o domínio constituído por um material composto de microestruturas. As propriedades efetivas do material composto são calculadas usando a teoria da homogeneização. O conceito OBH tem sido utilizado para a resolução de problemas de otimização em várias áreas, tais como: a minimização da flexibilidade de estruturas, por Suzuki & Kikuchi (1991), Díaz & Bendsoe (1992), Tenek & Hagiwara (1993), Bendsoe *et al.* (1995) e Krog & Olhoff (1999); a maximização da menor frequência natural, por Díaz & Kikuchi (1992) e Ma *et al.* (1995); a maximização da carga de flambagem da estrutura, por Min & Kikuchi (1997); a determinação de leiautes ótimos de placas, em diferentes colocações, cuja grande maioria tem sido aplicadas ao modelo de Mindlin-Reissner, ver Bendsoe *et al.* (1992), Bendsoe & Díaz (1993), Soto & Díaz (1992 e 1993), Suzuki & Kikuchi (1991), Díaz *et al.* (1995), Kikuchi *et al.* (1995), Krog & Olhoff (1999), Belblidia *et al.* (2001) e Belblidia & Hinton (2002).

Algumas formulações simplificadas de otimização topológica têm sido propostas por Mlejnek & Schirmacher (1993), Yang & Chuang (1994) e Costa Jr. & Alves (2002 e 2003). Nestas formulações, as variáveis de projeto são as densidades relativas de cada elemento finito. Adicionalmente, as propriedades efetivas do material são determinadas por relações constitutivas associando a densidade relativa com o módulo de Young, como no trabalho de Gea (1996). Neste trabalho Gea (1996) propõe uma equação constitutiva homogeneizada, a qual depende apenas da densidade relativa do material e é obtida da teoria de materiais compostos.

O modelo proposto neste capítulo utiliza um elemento finito Tri3 para interpolar não só as componentes do campo de deslocamento como também a densidade relativa do material. Adicionalmente, o modelo impõe uma restrição local, através da especificação de limites laterais às componentes do gradiente da densidade relativa, ver Sigmund & Petersson (1998). Estas restrições locais têm como objetivo: evitar os problemas de instabilidade de tabuleiro e diminuir a dependência da solução com a malha inicial. Como resultado, o procedimento proposto mostrou ser muito robusto e eficiente. A principal desvantagem deste método é a presença de uma camada de densidade relativa intermediária, representando uma região de material composto, ao longo do contorno material. Entretanto, esta desvantagem pode ser consideravelmente minimizada com a utilização de um esquema de refino  $h$ -adaptativo adequado.

A formulação do problema de otimização tem como objetivo minimizar a flexibilidade de estruturas do tipo placas, sujeitas: a uma restrição de volume, às restrições de limites laterais e às restrições de limites laterais para as componentes do gradiente da densidade relativa.

## 5.2 Formulação do problema

### 5.2.1 Introdução

O problema será formulado inicialmente como um sólido tridimensional, e posteriormente será aplicada a hipótese de placas de Mindlin-Reissner. Na formulação do problema de otimização topológica é utilizada uma abordagem material, a qual considera a utilização de uma microestrutura de material poroso.

Uma caracterização do problema de otimização de leiaute pode ser ilustrada de acordo com a Fig. 2.1, na qual:

- $\Omega$  é o domínio do corpo a ser considerado;
- $\partial\Omega$  é o contorno de  $\Omega$ , tal que,  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ;
- $\Gamma_u$  é a parte do contorno submetida a deslocamento prescrito, i.e.,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;
- $\Gamma_t$  é a parte do contorno  $\partial\Omega$  submetida à tração prescrita, i.e.,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ ;

- $\bar{\mathbf{b}}$  é a força de corpo prescrita definida em  $\Omega$ .  
 $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  e  $H = \{\bar{\mathbf{u}} + H_o\}$  denotam os conjuntos das variações e deslocamentos admissíveis respectivamente.

Um problema típico de placa está ilustrado na Fig. 3.1, onde é definido que:

- $h$  é a espessura da placa.

### 5.2.2 Formulação do problema de otimização de leiaute tridimensional

O problema de otimização de leiaute generalizado pode ser formulado como:  
 Determinar a densidade relativa  $\rho(\mathbf{x}) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , a qual é solução de

$$\min_{\rho} l(\mathbf{u}(\rho)) \quad (5.1)$$

sujeito à:

- (i) Restrição de volume efetivo

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega, \quad (5.2)$$

sendo  $\alpha$  uma fração de volume prescrita;

- (ii) Restrições de limites laterais

$$\rho_{\inf} \leq \rho \leq 1 \quad (5.3)$$

onde  $\rho_{\inf}$  é o limite inferior da densidade relativa, definido por  $\rho_{\inf} = 0,002$ ;

- (iii) Restrições de estabilidade

A imposição das restrições de estabilidade no processo de otimização topológica, propostas por Petersson & Sigmund (1998), têm as seguintes finalidades:

- Assegurar a existência da solução;
- Evitar a ocorrência de instabilidades de tabuleiro;
- Reduzir a dependência da topologia ótima com a malha inicial.

Desta forma, considera-se que:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \leq C_x^2 \quad (5.4)$$

e

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 \leq C_y^2. \quad (5.5)$$

As constantes  $C_x$  e  $C_y$  impõem um limite superior às componentes do gradiente da densidade relativa e o procedimento para as suas estimativas são apresentados na subseção 5.3.1. Os limites são impostos às componentes, de modo a permitir a adequada imposição de condições de simetria, quando estas forem necessárias.

O campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  é solução de: Encontrar  $\mathbf{u}(\rho) \in H$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \quad \mathbf{v} \in H_0 \quad (5.6)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (5.7)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (5.8)$$

### 5.2.3 Teoria de placa de Mindlin-Reissner

Neste ponto, as formulações gerais, dadas em (5.7) e (5.8), são particularizadas para estruturas de placas semi-espessas. O modelo de placa de Mindlin-Reissner considera a equação constitutiva dada em (5.13) e um conjunto de hipóteses cinemáticas. Estas hipóteses definem o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  de modo que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_x(\mathbf{x}) \mathbf{e}_x + u_y(\mathbf{x}) \mathbf{e}_y + u_z(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z \quad (5.9)$$

sendo que  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  são os vetores que formam a base cartesiana ortonormal e que

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_x(x, y),$$

$$u_y(x, y, z) = v(x, y) + z\theta_y(x, y)$$

e

$$u_z(x, y, z) = w(x, y). \quad (5.10)$$



Como resultado, as componentes do tensor deformação infinitesimal, são dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = e_{xx}^o + z \chi_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = e_{yy}^o + z \chi_{yy}, \\ \varepsilon_{zz} &= 0, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}^o + z \chi_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \text{e} \\ \gamma_{yz} &= \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

#### 5.2.4 Definição do modelo da microestrutura

Para formular o problema de otimização de leiaute, aplica-se uma técnica de relaxação do problema que consiste na utilização de um material composto caracterizado pela presença de microestruturas porosas, parametrizadas por sua densidade relativa. Neste capítulo, utiliza-se o modelo material SIMP, o qual considera o módulo de Young efetivo, para uma densidade relativa intermediária,  $E(\rho)$ , sendo dado por:

$$E(\rho) = \rho^\eta E_o.\tag{5.12}$$

Aqui,  $E_o$  representa o módulo de Young do material sólido e  $\eta$  denota o parâmetro de penalização. Este parâmetro penaliza regiões com densidades intermediárias, resultando em leiautes ótimos com um número reduzido de regiões com densidade intermediária. A escolha de  $\eta = 4$  é baseada em investigações numéricas e nos resultados apresentados por Bendsoe & Sigmund (1999), onde se mostra que para  $\eta \geq 3$ , pode-se determinar uma microestrutura, i.e., obter uma realização física, de um material composto, no qual a equação constitutiva homogeneizada é capaz de reproduzir as propriedades do material poroso do tipo SIMP, em um ponto qualquer do domínio.

No caso da teoria de Mindlin-Reissner considera-se que a equação constitutiva homogeneizada, associada ao modelo SIMP, é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^H(\rho)] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.13)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$  com

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_{11}^H(\rho)] & [0] \\ [0] & [\mathbf{D}_{22}^H(\rho)] \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$[\mathbf{D}_{11}^H(\rho)] = \frac{E(\rho)}{(1 - \nu_o^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_o \\ \nu_o & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$[\mathbf{D}_{22}^H(\rho)] = G(\rho) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

O módulo de cisalhamento  $G(\rho)$  é definido como:

$$G(\rho) = \frac{E(\rho)}{2(1 + \nu_o)}, \quad (5.17)$$

sendo que  $\nu_o$  denota o coeficiente de Poisson para o material completamente denso.

Definindo

$$\mathbf{N}^T = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} dz,$$

$$\mathbf{M}^T = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} z dz$$

e

$$\mathbf{Q}^T = \{Q_{xz}, Q_{yz}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} dz, \quad (5.18)$$

pode-se obter as seguintes equações constitutivas generalizadas:

(i) **Equação constitutiva generalizada de membrana**

$$\mathbf{N} = [\mathbf{D}_m] \mathbf{e}_m^o \quad (5.19)$$

onde  $\{\mathbf{e}_m^o\}^T = \{e_{xx}^o, e_{yy}^o, \gamma_{xy}^o\}$ ,  $[\mathbf{D}_m] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_m^{11}] & 0 \\ 0 & D_m^{22} \end{bmatrix}$ ,

$$[\mathbf{D}_m^{11}] = \frac{E(\rho)h}{(1-\nu_o^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_o \\ \nu_o & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_m^{22} = G(\rho)h; \quad (5.20)$$

**(ii) Equação constitutiva generalizada de flexão**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{D}_b] \boldsymbol{\chi} \quad (5.21)$$

onde  $\{\boldsymbol{\chi}\}^T = \{\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}\}$ ,  $[\mathbf{D}_b] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_b^{11}] & 0 \\ 0 & D_b^{22} \end{bmatrix}$ ,

$$[\mathbf{D}_b^{11}] = \frac{E(\rho)h^3}{12(1-\nu_o^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_o \\ \nu_o & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_b^{22} = G(\rho) \frac{h^3}{12}; \quad (5.22)$$

**(iii) Equação constitutiva generalizada de cisalhamento transversal**

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{D}_b] \boldsymbol{\gamma}_t \quad (5.23)$$

onde  $\{\boldsymbol{\gamma}_t\}^T = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ ,  $[\mathbf{D}_b] = G(\rho)h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Neste ponto, definindo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^o + z\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.24)$$

onde  $\{\mathbf{v}^o\}^T = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$  e  $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}^T = \{\hat{\theta}_y, \hat{\theta}_x, 0\}$ , integrando (5.7) e (5.8) em  $z$ ,  $z \in [-h/2, h/2]$  e utilizando as eqs. (5.18) e (5.11), obtém-se o seguinte resultado:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Lambda} \left\{ \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_m^o(\mathbf{v}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\chi}(\mathbf{v}) + \tau \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma}_t(\mathbf{v}) \right\} d\Lambda, \quad (5.25)$$

sendo o fator de correção da deformação cisalhante, para teoria de Mindlin-Reissner, dado por  $\tau = 5/6$ . Além disso, assumindo  $\bar{\mathbf{b}}$  como sendo constante, integrando (5.8) em  $z$ ,  $z \in [-h/2, h/2]$  e utilizando as eqs. (5.18) e (5.11), obtém-se:

$$l(\mathbf{v}^o, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \int_{\Lambda} h \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}^o d\Lambda + \int_{\Gamma_t} \left\{ \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}^o + \bar{\mathbf{M}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} d\Gamma \quad (5.26)$$

onde

$$\{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{1, z\} \bar{\mathbf{t}} dz. \quad (5.27)$$

### 5.3 Descrição do modelo de otimização de leiaute

O problema de placa de Mindlin-Reissner é discretizado pela aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin, através da utilização de um elemento Tri3, que interpola tanto as componentes do campo de deslocamento  $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$  como também o campo de densidade relativa  $\rho$ , como mostrado na Fig. 5.1. Com o objetivo de contornar o fenômeno de travamento sob cisalhamento, conhecido como *shear locking*, é utilizado o método DSG - (*Discret Shear Gap*) proposto por Bletzinger *et al.* (2000).

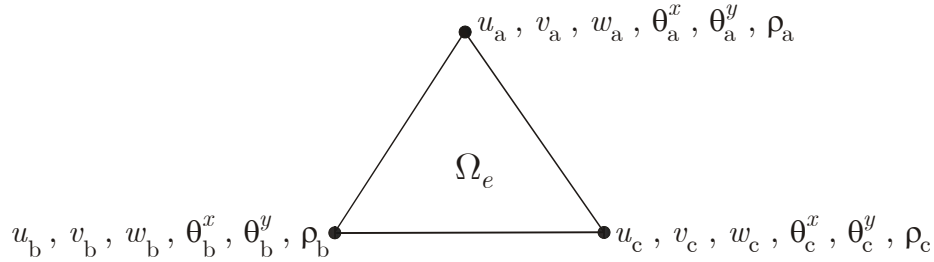


Figura 5.1: Discretização do elemento finito para prob. de placa semi-espessa.

Como resultado da discretização de  $\rho(\mathbf{x})$ , as variáveis de projeto são então definidas como sendo os valores da densidade relativa nos nós da malha de elementos finitos. Além disso, devido à particularidade da interpolação adotada, as derivadas parciais da densidade relativa  $\partial\rho/\partial x$  e  $\partial\rho/\partial y$ , assim como, o tensor de deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  são constantes no interior de cada elemento finito. Note porém que, de acordo com (5.13), o campo de tensão não será homogêneo no interior de cada elemento.

Neste capítulo, a idéia principal é combinar um método eficiente de otimização de leiaute com um esquema adequado de refino  $h$ -adaptativo da malha, visando a diminuição do problema de grande escala obtido, para o nível de resolução refinada desejada. A utilização de uma função de interpolação de baixa ordem reduz consideravelmente os custos computacionais necessários para a determinação do leiaute ótimo da estrutura. Entretanto, vários problemas de instabilidade de tabuleiro foram observados quando da utilização de elementos de baixa ordem de interpolação. Com o objetivo de contornar estas instabilidades, considerou-se a imposição de uma

restrição lateral local às componentes do gradiente da densidade relativa, como proposto por Petersson & Sigmund (1998). Porém, como  $\partial\rho/\partial x$  e  $\partial\rho/\partial y$  são constantes no interior de cada elemento, verifica-se ser necessário apenas impor:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_e^2 \leq (C_x^e)^2, \quad (5.28)$$

e

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_e^2 \leq (C_y^e)^2, \quad e = 1, \dots, n_e, \quad (5.29)$$

onde  $n_e$  denota o número total de elementos na malha.

### 5.3.1 Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 4.2, sendo  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$  as coordenadas dos vértices e  $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)$  as coordenadas do baricentro do elemento Tri3. Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|\mathbf{d}_i\| \quad i = 1, \dots, 3 \quad (5.30)$$

pode-se definir

$$C_x^e = C_y^e = \frac{1}{d_{\min}}. \quad (5.31)$$

No caso em que uma das arestas do elemento coincide com um eixo de simetria, é necessário uma adequação dos limites  $C_x^e$  e  $C_y^e$ . Aqui, são considerados dois casos possíveis, que são:

#### (i) Eixo de simetria - $x$

Neste caso, considera-se que a aresta  $\overline{ab}$  do elemento coincide com o eixo- $x$  de simetria, o que, como ilustrado na Fig. 4.3, requer a imposição de  $v = 0$  e  $(\partial\rho/\partial y) = 0$ . A satisfação desta última imposição pode ser alcançada redefinindo  $C_y^e$  como  $C_y^e = 0$ .

#### (ii) Eixo de simetria - $y$

Neste caso, considera-se que a aresta  $\overline{bc}$  do elemento coincide com o eixo- $y$  de simetria, o que, como ilustrado na Fig. 4.4, requer a imposição de  $u = 0$  e  $(\partial \rho / \partial x) = 0$ . A satisfação desta última imposição pode ser alcançada redefinindo  $C_x^e$  como  $C_x^e = 0$ .

### 5.3.2 Formulação discreta do problema de otimização

O problema discreto de otimização de leiaute pode ser definido como: Sendo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + z\boldsymbol{\theta}$ , determinar  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$  tal que é solução de:

$$\min_{\boldsymbol{\rho}} f(\mathbf{u}^\circ(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\rho})) \quad (5.32)$$

tal que

$$h(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega - \alpha = 0, \quad (5.33)$$

$$g_{2e-1}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 - (C_x^e)^2 \right\} \leq 0, \quad (5.34)$$

$$g_{2e}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 - (C_y^e)^2 \right\} \leq 0, \quad (5.35)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$ ;  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X}$  com  $\mathbf{X} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\inf} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\sup}, i = 1, \dots, n \right\}$  e  $n$  corresponde ao número de nós da malha de elementos finitos. Aqui é denotado que  $\beta = 1/d_{\max}$ , sendo que  $d_{\max}$  é definido como  $d_{\max} = \max_{i=1,3} \|\mathbf{d}_i\|$ . A função objetivo é dada por:  $f(\mathbf{u}^\circ, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\beta_o} l(\mathbf{u}^\circ(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\rho}))$ , com  $\beta_o = l(\mathbf{u}^\circ(\boldsymbol{\rho}_o), \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\rho}_o))$ , para um dado vetor de densidade relativa nodal inicial  $\boldsymbol{\rho}_o$ . Além disso, os campos  $(\mathbf{u}^\circ, \boldsymbol{\theta})$  são determinados pela resolução da eq. (5.6), no qual são utilizadas às eqs. (5.25) e (5.26).

Agora, para resolver o problema definido por (5.32), (5.33), (5.34) e (5.35) aplica-se o Método do Lagrangiano Aumentado. Como resultado, formula-se o problema como uma seqüência de problemas de otimização com restrições laterais do tipo caixa. O procedimento geral pode ser resumido como:

- Denotar  $k = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$ ,  $erro = 1,0$ ,  $\varepsilon^k$  e  $tol$ .

- Enquanto  $erro > tol$ , efetuar *laço*:

- (i) Resolver o problema de minimização com restrições de limites laterais

$$\min \chi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\varepsilon}^k), \quad \forall \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X} \quad (5.36)$$

onde

$$\chi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\varepsilon}^k) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\varepsilon^k} \left\{ \sum_j \Psi_j(g_j(\boldsymbol{\rho}), \lambda_j^k, \varepsilon^k) + h(\boldsymbol{\rho})[h(\boldsymbol{\rho}) + 2\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}^k] \right\} \quad (5.37)$$

com

$$\Psi_j(g_j(\boldsymbol{\rho}), \lambda_j^k, \varepsilon^k) = \begin{cases} g_j(\boldsymbol{\rho})[g_j(\boldsymbol{\rho}) + 2\varepsilon^k \lambda_j^k], & \text{se } g_j(\boldsymbol{\rho}) \geq -\varepsilon^k \lambda_j^k \\ -(\varepsilon^k \lambda_j^k)^2, & \text{se } g_j(\boldsymbol{\rho}) < -\varepsilon^k \lambda_j^k \end{cases} \quad (5.38)$$

Denotar a solução por  $\boldsymbol{\rho}^k$ .

(ii) Atualizar os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_j^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_j^k + \frac{1}{\varepsilon^k} g_j(\boldsymbol{\rho}^k) \right\} \quad (5.39)$$

e

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \frac{1}{\varepsilon^k} h(\boldsymbol{\rho}^k) \quad (5.40)$$

(iii) Calcular o *erro*

$$e_1 = \max_j \left\{ \frac{|\lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k|}{\max\{1, \lambda_j^{k+1}\}} \right\}, \quad (5.41)$$

$$e_2 = \frac{|\boldsymbol{\mu}^{k+1} - \boldsymbol{\mu}^k|}{\max\{1, \boldsymbol{\mu}^{k+1}\}}, \quad (5.42)$$

onde

$$erro = \max\{e_1, e_2\} \quad (5.43)$$

(iv) Atualizar o parâmetro de penalidade

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \begin{cases} \gamma \boldsymbol{\varepsilon}^k, & \text{se } \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} < \boldsymbol{\varepsilon}_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0,1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{crit}, & \text{se } \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} \geq \boldsymbol{\varepsilon}_{crit} \end{cases} \quad (5.44)$$

- Fim do *laço*

O problema de otimização de caixa é resolvido pelo Método das Assíntotas Móveis proposto por Svanberg (1987).

## 5.4 Refino da malha com adaptatividade $h$

A descrição geral do método utilizado neste capítulo é análoga à descrita na subseção 4.3.1. A estratégia de refino  $h$ -adaptativo é a idêntica à descrita na subseção 4.3.2. O mesmo ocorre com o processo de suavização Laplaciano condicional, descrito na subseção 4.3.3. Resta, portanto a descrição do estimador de erro e do critério de refino.

### 5.4.1 Estimador de erro

Aqui é utilizado um estimador de erro proposto por Zienkiewics & Zhu (1990), o qual é baseado numa técnica de recuperação do gradiente por meio da norma da energia, ver Babuska *et al.* (1986), Georges & Shephard (1991), Bugada (1991) e Wilberg & Abdulwahab (1997). Considere agora uma distribuição realizável  $\boldsymbol{\rho}$ . Pode-se definir o erro local do deslocamento, associado à  $\boldsymbol{\rho}$ , como:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \quad (5.45)$$

onde  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$  é a solução exata e  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})$  é a solução aproximada do problema. A norma da energia pode então ser expressa como:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (5.46)$$

O erro da tensão local pode também ser expresso em termos do erro do deslocamento local, como segue:

$$\mathbf{e}_{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho})) = \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})). \quad (5.47)$$

Sendo assim, a norma da energia pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (5.48)$$



Porém, como a distribuição de tensão exata é desconhecida, aproxima-se  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})$  por uma solução melhorada  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$ , a qual é mais refinada que  $\boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})$ . Daí aproxima-se o indicador de erro por:

$$\|\mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega. \quad (5.49)$$

#### 5.4.2 Determinação de $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$

Para determinar a solução melhorada  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$ , aplica-se a técnica de projeção proposta por Zienkiewicz & Zhu (1990 e 1991), a qual é baseada no fato de que a solução do campo de deslocamento aproximado  $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\rho}) \in C^0(\Omega)$  e que o campo de tensão aproximado é apenas contínuo por partes. A determinação de  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  consiste na solução por mínimos quadrados do potencial  $\psi(\boldsymbol{\rho})$ , sendo

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega \quad (5.50)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  é interpolado dentro de cada elemento como

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{j=1}^{n_d} N_j \bar{\boldsymbol{\sigma}}_j^*, \quad (5.51)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_j^*$  é o tensor tensão avaliado no  $j$ -ésimo nó do elemento, e  $N_j$  são as clássicas funções de interpolação usadas para interpolar o campo de deslocamentos.

Agora, uma vez que  $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho})$  é determinado, pode-se calcular o erro médio global  $\Theta_G$ , como

$$\Theta_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega; \quad (5.52)$$

o erro médio do elemento  $\Theta_e$ , como

$$\Theta_e = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) \cdot [\mathbf{D}^H(\boldsymbol{\rho})]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{\rho})) d\Omega_e. \quad (5.53)$$

## 5.5 Resultados

Aqui, algumas aplicações são apresentadas com o objetivo de avaliar a performance do procedimento proposto. Para acompanhar a evolução do processo de otimização de leiaute, são ilustrados alguns dos leiautes ótimos intermediários e suas respectivas malhas de elementos finitos. Por simplicidade, utiliza-se o mesmo material em todos os casos, sendo o módulo de Young  $E_o = 215,0 \text{ GPa}$  e o coeficiente de Poisson  $\nu_o = \frac{1}{3}$ .

### Problema 5.1:

Considere o problema ilustrado na Fig. 5.2, o qual consiste em uma placa engastada em duas bordas adjacentes e uma carga transversal  $\mathbf{P} = 100,0 \times 10^3 \text{ N}$  aplicada na extremidade oposta. O problema é submetido a uma restrição de volume  $\alpha = 0,30$ .

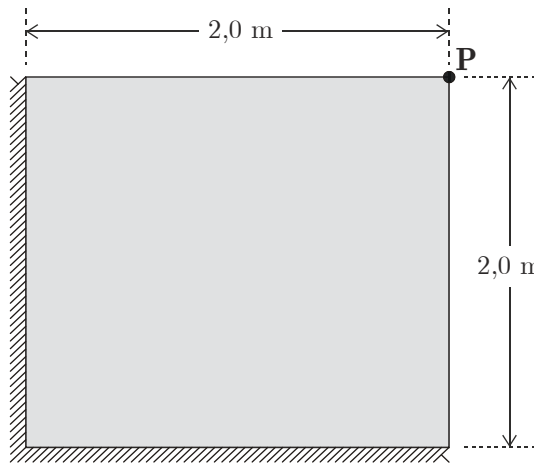


Figura 5.2: Definição do problema (5.1).

Visando investigar a dependência da malha inicial na topologia ótima final, são considerados dois casos, denominados respectivamente de (1a) e (2a), cada um iniciando com uma malha distinta. A topologia ótima final, para ambos os casos, será comparada posteriormente permitindo uma análise da dependência da topologia final com relação à escolha da malha inicial. A escolha de diferentes pontos de partida, representados pela utilização de diferentes malhas iniciais, possibilita a determinação de diferentes mínimos locais, i.e. topologias ótimas finais, o que caracteriza a não convexidade do problema de otimização.

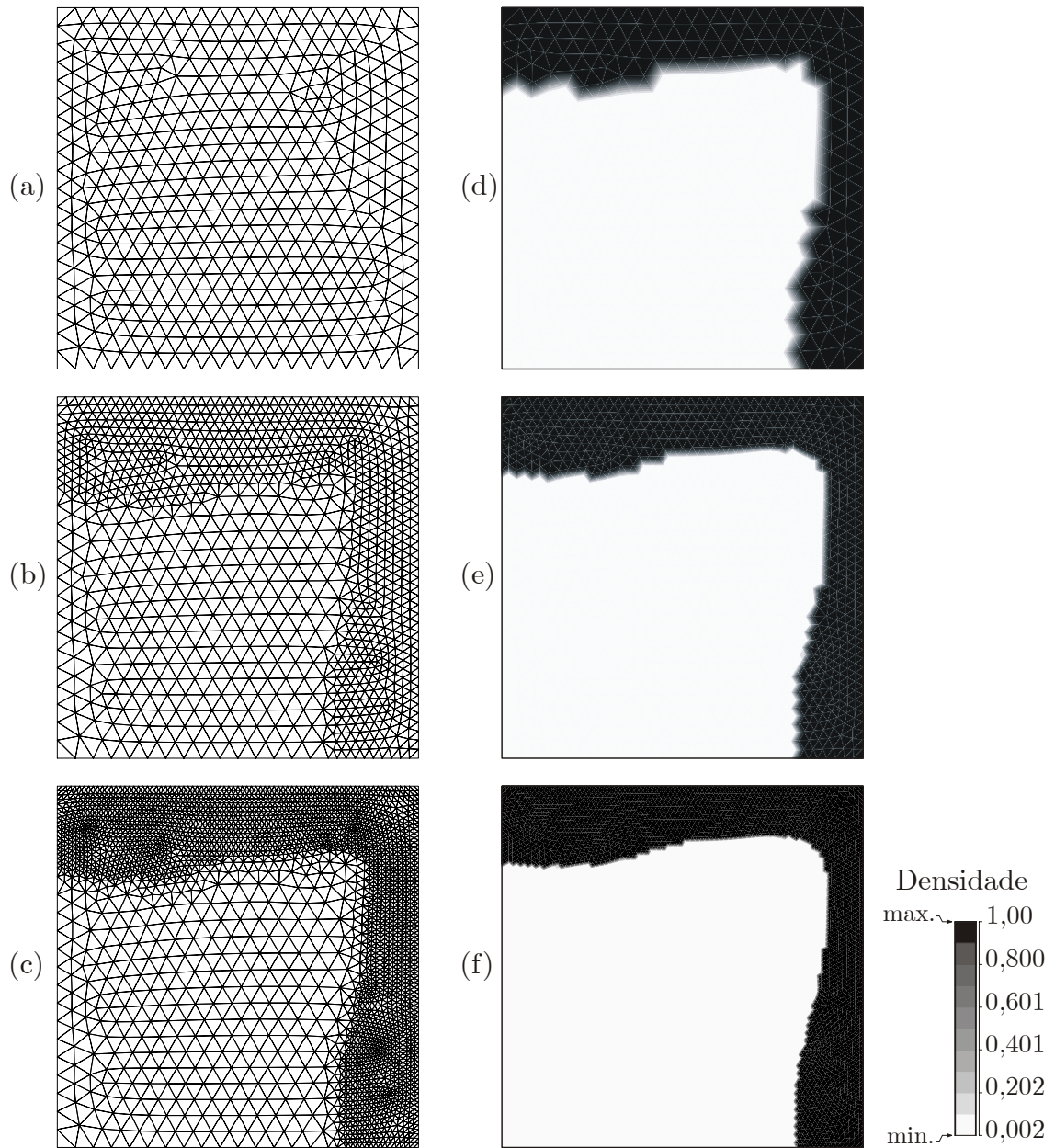


Figura 5.3: Seq. de leiautes ótimos da placa  $c$ / carga na extremidade (malha inicial, com 902 elementos).

A seqüência de malhas resultantes do caso (1a) decorrente do processo de refino  $h$ -adaptativo é descrita como segue: A malha inicial, com 902 elementos e 492 nós, é ilustrada na Fig. 5.3(a); a segunda malha refinada, com 2014 elementos e 1073 nós, é ilustrada na Fig. 5.3(b) e a malha refinada final, com 5723 elementos e 2976 nós, é ilustrada na Fig. 5.3(c).

A evolução dos leiautes ótimos intermediários está ilustrada nas Figs. 5.3(d-f). A evolução mostra a melhora na resolução do contorno material, resultante do processo de refino  $h$ -adaptativo. Os resultados mostram que a seqüência de leiautes

ótimos intermediários tende a convergir para um leiaute ótimo final, com a aplicação sucessiva do processo de refino  $h$ -adaptativo, melhorando consideravelmente a resolução do contorno material.

A seqüência de malhas resultante do caso (2a) decorrente do processo de refino  $h$ -adaptativo está ilustrada nas Figs. 5.4(a-f). A malha inicial ilustrada nas Figs. 5.4(a,d) têm 1410 elementos e 756 nós; a malha refinada ilustrada nas Figs. 5.4(b,e) têm 3001 elementos e 1582 nós e finalmente a malha refinada final, ilustrada nas Figs. 5.4(c,f) têm 8600 elementos e 4442 nós.

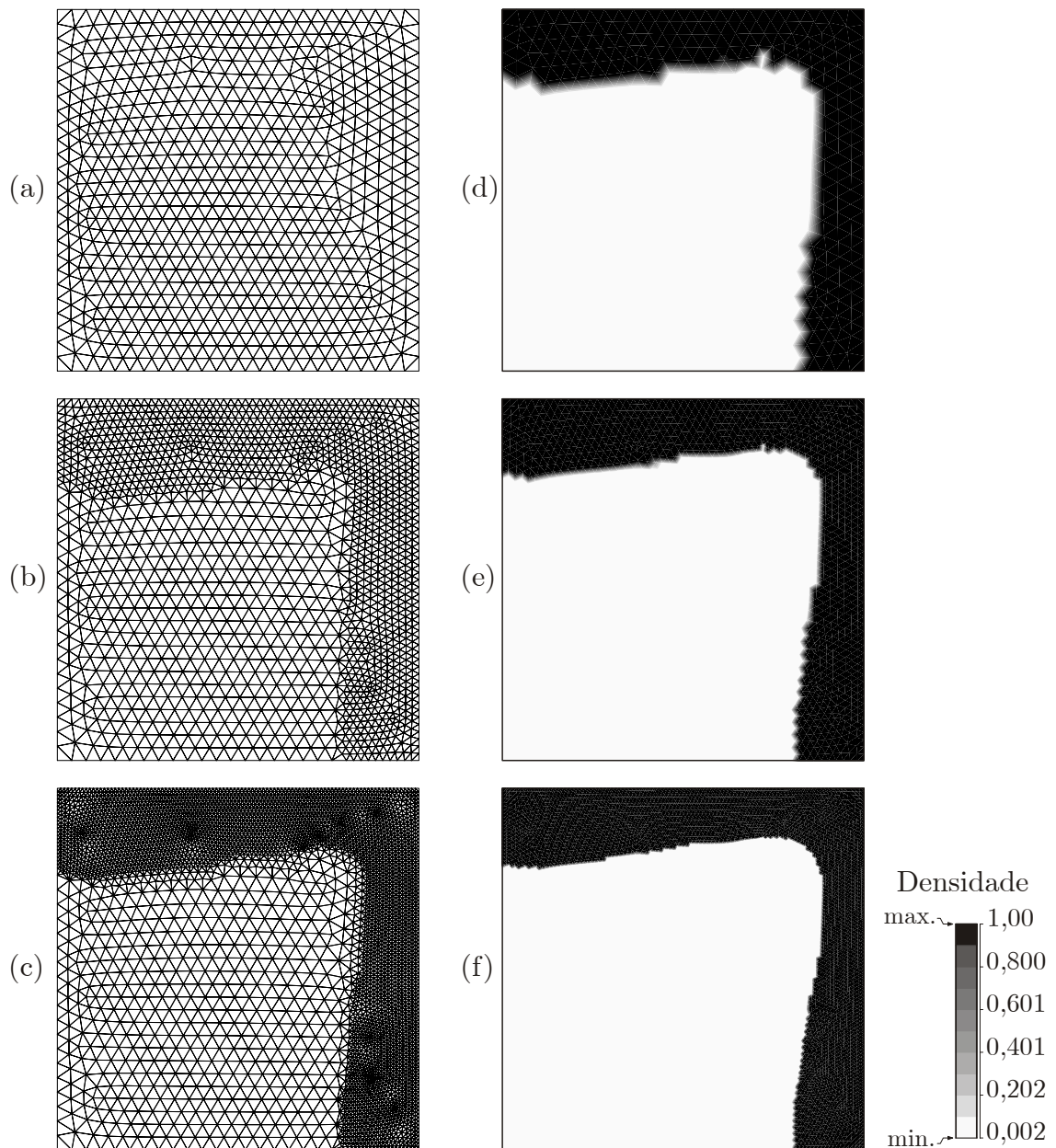


Figura 5.4: Seq. de leiautes ótimos da placa c/ carga na extremidade (malha inicial, com 1410 elementos).

Pode-se verificar que a topologia de ambos os casos é essencialmente idêntica. A única diferença é resultante do maior refinino da malha inicial utilizada no caso (2a) o que acarretou em uma topologia ótima final com uma melhor resolução que a obtida no caso (1a). Desta forma, pode-se concluir que não ocorreu nenhuma dependência da malha inicial na determinação da topologia ótima final neste caso analisado.

### Problema 5.2:

Considere o problema ilustrado na Fig. 5.5 que consiste em uma placa engastada em suas bordas, submetida a uma carga central  $\mathbf{P} = 50,0 \times 10^3$  N normal à superfície. O problema é submetido a uma restrição de volume  $\alpha = 0,30$ .

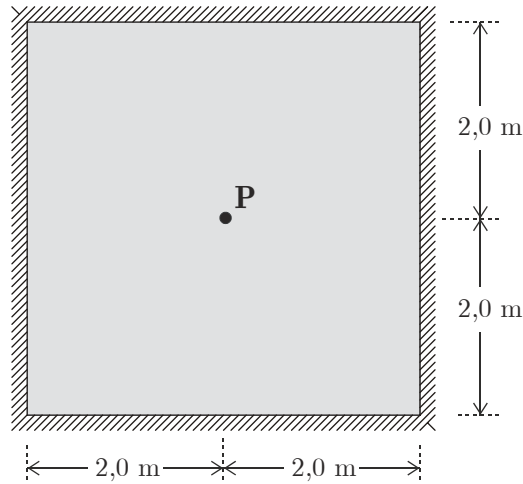


Figura 5.5: Definição do problema (5.2).

Novamente, visando investigar a dependência da malha inicial na topologia ótima final, são considerados dois casos, denominados respectivamente de (1a) e (2a), cada um iniciando com uma malha distinta.

A seqüência de topologias ótimas parciais resultantes da solução do caso (1a) decorrente do processo de refino  $h$ -adaptativo está ilustrada nas Figs. 5.6(a-f). A malha inicial, com 980 elementos e 531 nós, e a topologia ótima obtida estão ilustradas respectivamente nas Figs. 5.6(a,d). A malha refinada, representando o segundo nível de refino, com 2166 elementos e 1149 nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.6(b,e). A malha refinada final, com 6131 elementos e 3171 nós, e a topologia ótima final estão ilustradas nas Figs. 5.6(c,f). Note que, devido às condições de simetria, somente um quarto do domínio foi realmente discretizado.

Estas descrições referentes ao número de elementos e de nós referem-se à malha discretizada com as condições de simetrias impostas.

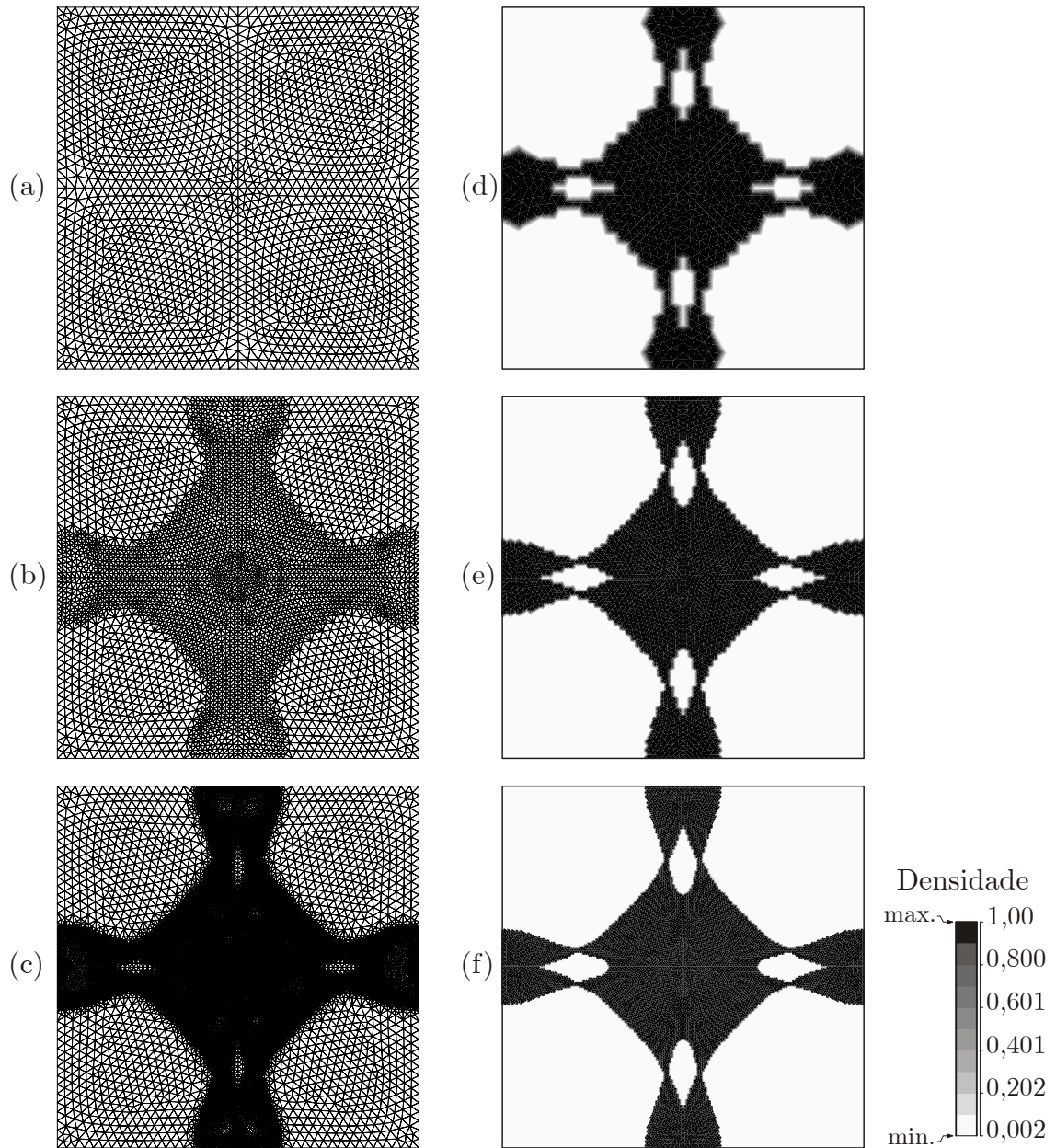


Figura 5.6: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada com carga central (malha inicial com 980 elementos em  $\frac{1}{4}$  de simetria).

A seqüência de topologias ótimas parciais resultantes da solução do caso (2a) decorrente do processo de refino  $h$ -adaptativo está ilustrada nas Figs. 5.7(a-f).

A malha inicial com 1410 elementos e 756 nós e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.7(a,d). A malha refinada, referente ao segundo nível de refino contendo 3105 elementos e 1635 nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.7(b,e). A última malha refinada, com 9060 elementos e 4665



nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.7(c,f). (OBS: as quantidades mencionadas de elementos e nós são referentes a um quarto de simetria).

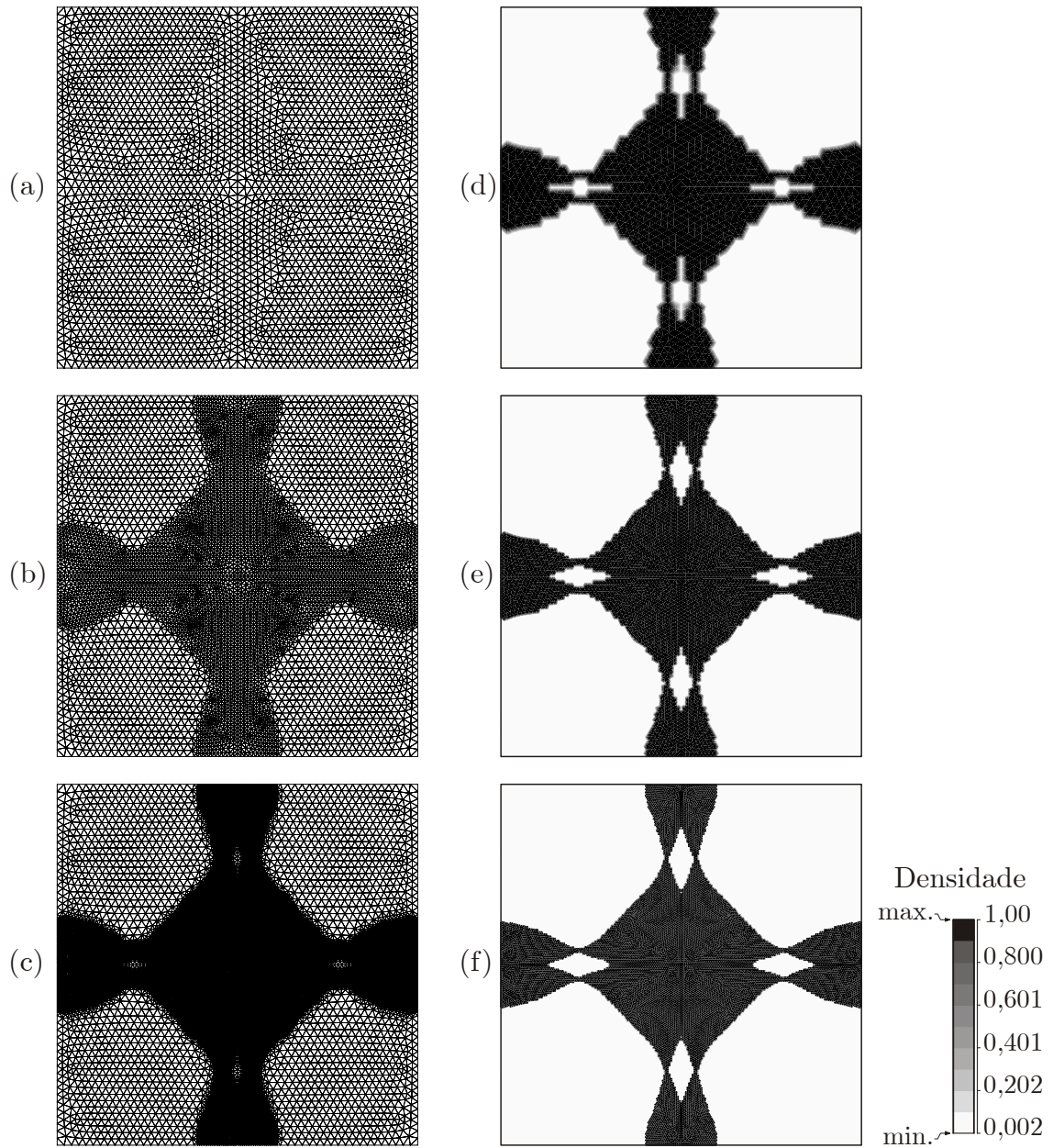


Figura 5.7: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada com carga central (malha inicial com 1410 elementos em  $\frac{1}{4}$  de simetria).

Aqui, pode-se verificar novamente, por comparação entre as topologias ótimas finais ilustradas nas Figs. 5.6(f) e 5.7(f), a não dependência da topologia ótima final com relação à escolha da malha inicial. Note também a ocorrência de uma melhora na forma ótima, associada à topologia ótima, obtida no caso (2a) devido à utilização de uma malha inicial mais refinada que a utilizada em (1a).

**Problema 5.3:**

O problema a ser resolvido consiste em uma placa quadrada engastada em torno dos vértices como ilustrado na Fig. 5.8. A placa é submetida a uma carga concentrada  $\mathbf{P} = 50,0 \times 10^3$  N aplicada no centro da placa e a uma fração de volume  $\alpha = 0,30$ .

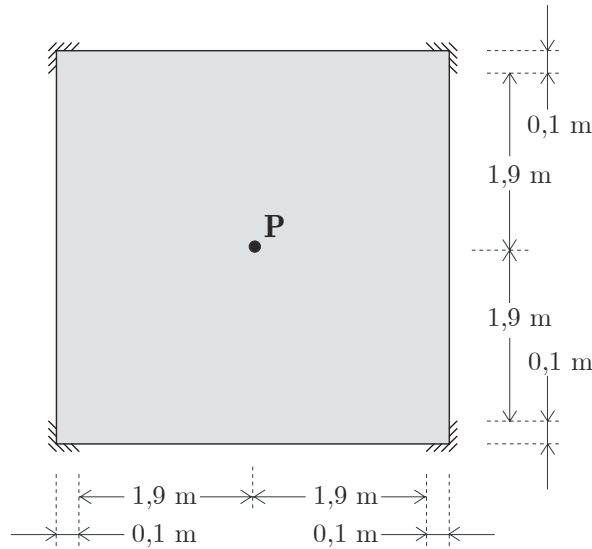


Figura 5.8: Definição do problema (5.3).

A seqüência de malhas e as topologias ótimas associadas estão ilustradas nas Figs. 5.9(a-f). A malha inicial, com 980 elementos e 531 nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.9(a,d). A malha refinada, referente ao segundo nível de refino contendo 2298 elementos e 1198 nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas nas Figs. 5.9(b,e). A malha refinada final com 6540 elementos e 3349 nós, e a topologia ótima final estão ilustradas nas Figs. 5.9(c,f). Note que, devido à simetria, as quantidades mencionadas de elementos e de nós são referentes a um quarto do domínio.



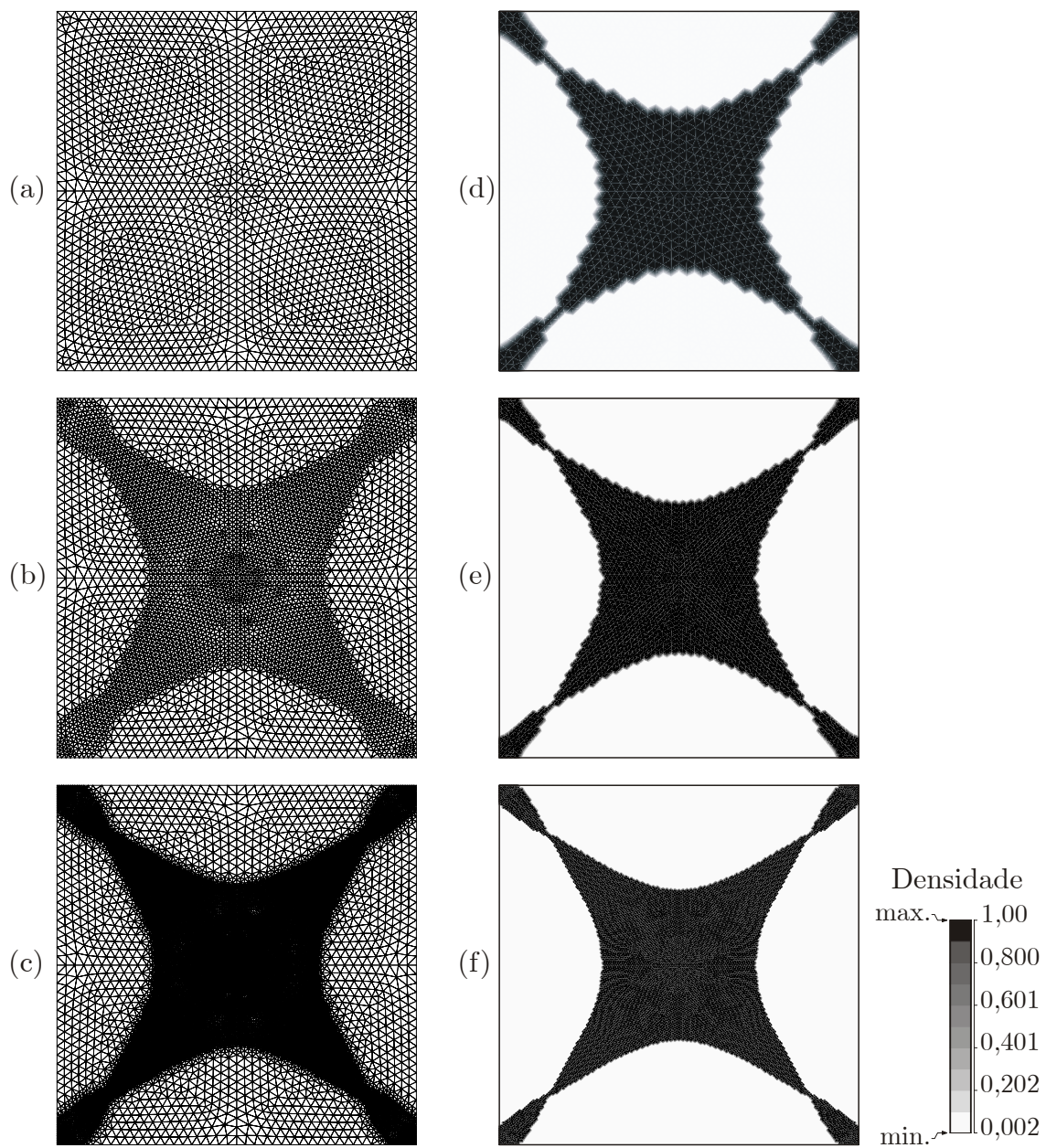


Figura 5.9: Seq. de leiautes ótimos da placa engastada nas extremidades.

**Problema 5.4:**

Neste problema é determinado o leiaute ótimo de uma placa engastada na borda esquerda e submetida a uma carga concentrada transversal  $\mathbf{P} = 50,0 \times 10^3 \text{ N}$  aplicada ao meio da borda oposta, como mostrada na Fig. 5.10. A placa é submetida a uma fração de volume  $\alpha = 0,30$ .

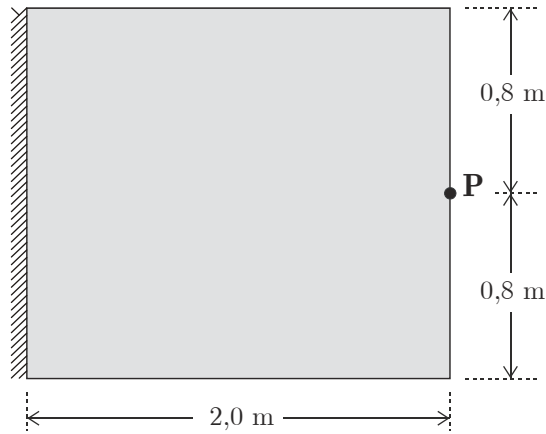


Figura 5.10: Definição do problema (5.4).

As malhas utilizadas e as topologias ótimas parciais resultantes do processo de refino  $h$ -adaptativo são ilustradas nas Figs.: 5.11(a,e), com 780 elementos e 431 nós; 5.11(b,f), representando o segundo nível de refino, com 1862 elementos e 991 nós; 5.11(c,g), representando o terceiro nível de refino, com 5395 elementos e 2784 nós; 5.11(d,h), representando o quarto nível de refino, com 17848 elementos e 9054 nós. É importante observar que, devido à simetria, apenas um quarto do domínio foi discretizado.

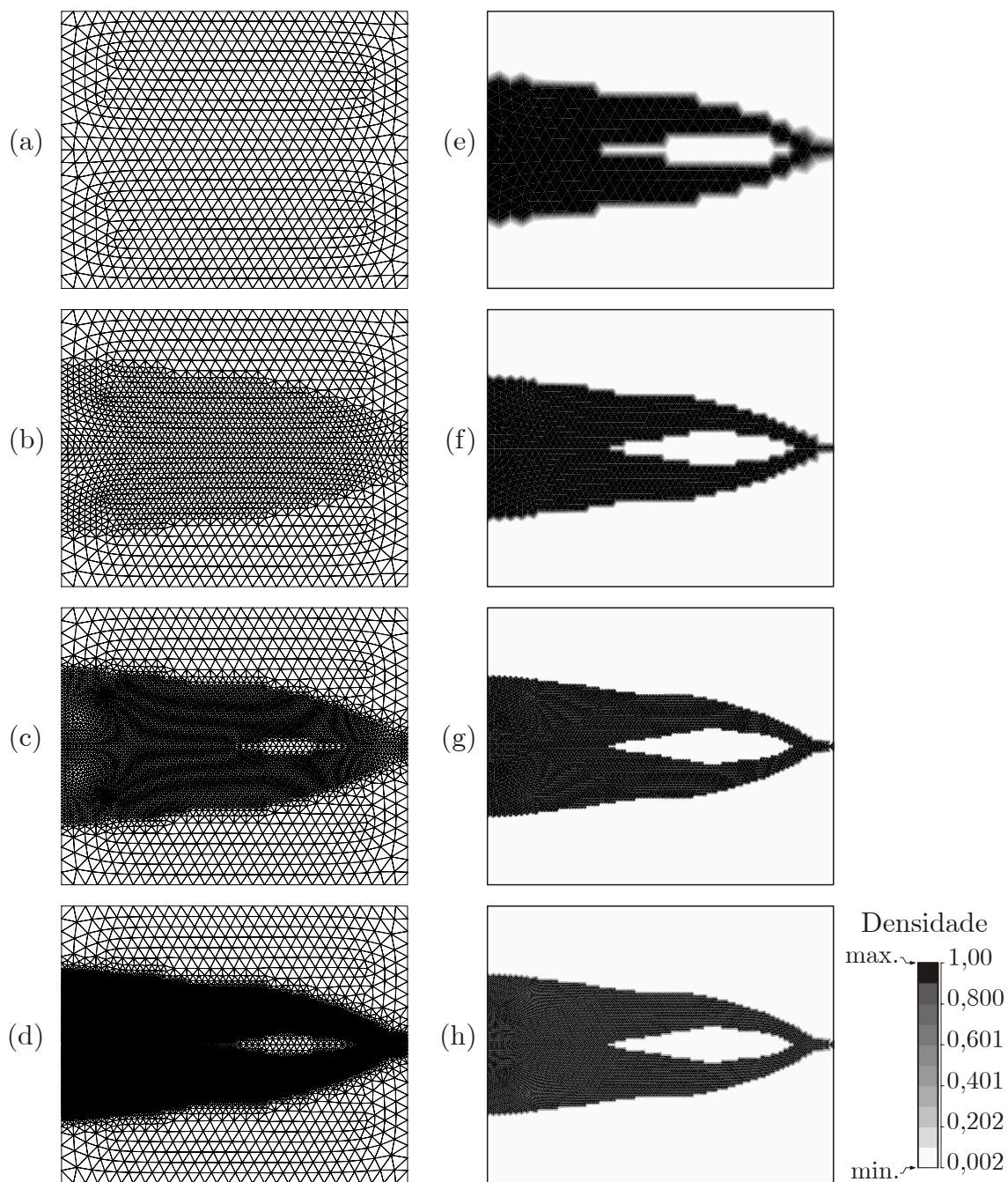


Figura 5.11: Seq. de leiautes ótimos da placa sob flexão  
(malha inicial com 980 elementos em  $\frac{1}{2}$  de simetria).

### Problema 5.5:

O problema a ser considerado aqui é análogo ao anterior, ver ilustração na Fig. 5.6. Entretanto, neste caso utiliza-se uma nova geometria como ilustrada na Fig. 5.12.

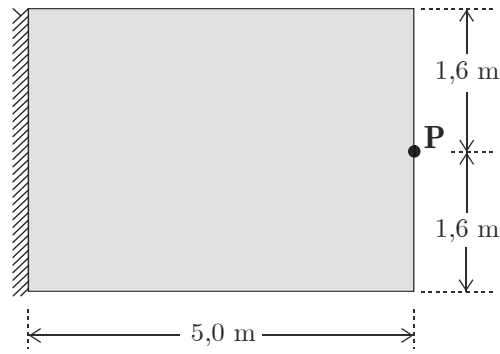
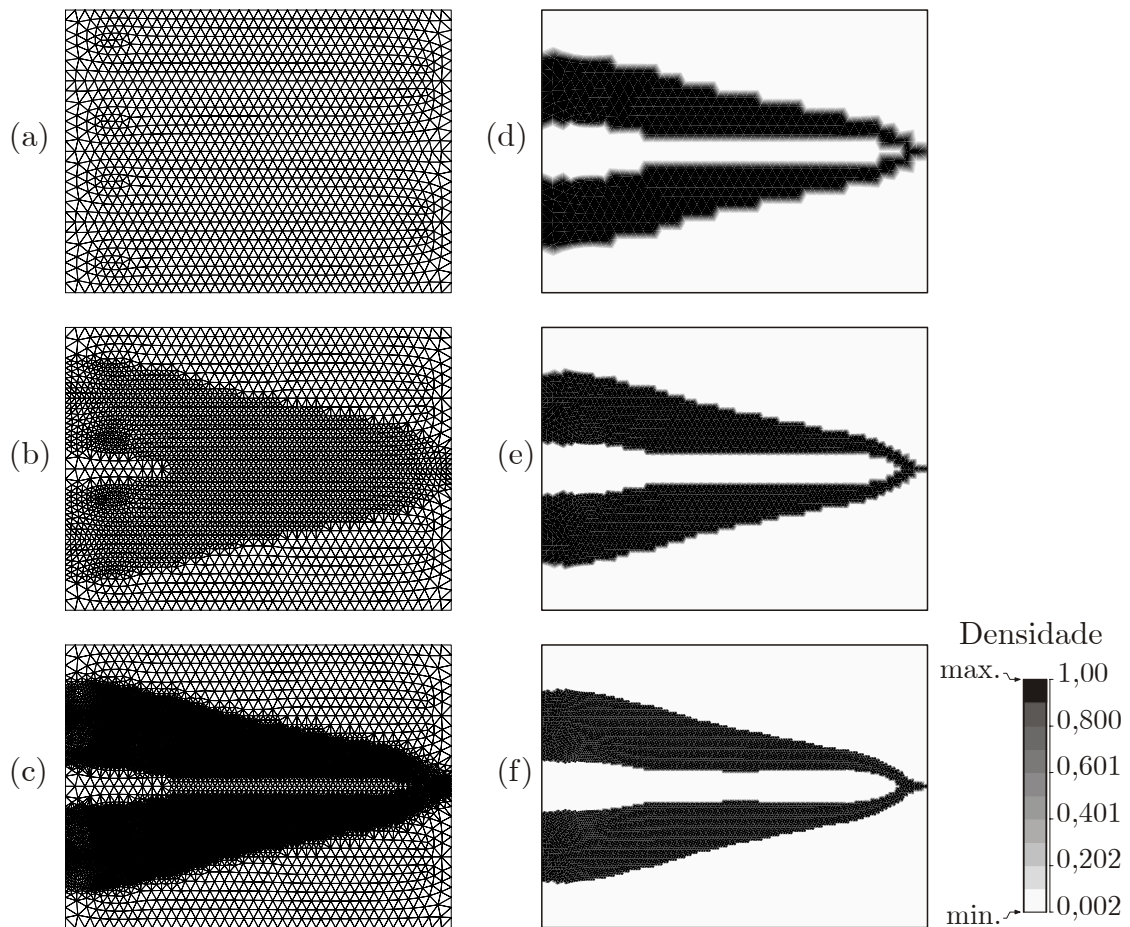


Figura 5.12: Definição do problema (5.5).

Neste exemplo, a carga concentrada transversal é  $\mathbf{P} = 50,0 \times 10^3 \text{ N}$  e a fração de volume prescrita é  $\alpha = 0,30$ . A sequência de malhas e os respectivos resultados para o total de três níveis de refino estão ilustrados nas Figs.: 5.13(a,d), com 1260 elementos e 685 nós; 5.13(b,e), com 3104 elementos e 1627 elementos; 5.13(c,f), com 9028 elementos e 4602 nós. Devido à simetria, somente um quarto do domínio foi discretizado. Sendo assim, os números de elementos e de nós citados referem-se apenas a esta parte do domínio.


 Figura 5.13: Seq. de leiautes ótimos da placa sob flexão (malha inicial com 1260 elementos em  $\frac{1}{2}$  de simetria).

## 5.6 Conclusão

O processo proposto mostrou ser muito robusto e eficiente na geração de topologias ótimas, proporcionando leiautes estruturais nítidos, i.e., com alta definição no contorno material. Além disso, observa-se, para a resolução final, uma redução significativa do número total de variáveis de projeto quando comparada com uma discretização homogênea do tipo *pixel*. A utilização do elemento Tri3 combinada com a aplicação da restrição lateral imposta às componentes do gradiente da densidade relativa resultou num algoritmo com alto desempenho, robusto e estável, não apresentando problemas de instabilidade de tabuleiro. As constantes  $C_x^e$  e  $C_y^e$ , utilizadas nas eqs. (5.28) e (5.29), são atualizados de acordo com o tamanho do elemento para cada nível de refino da malha, ver eq. (4.33). Na malha inicial, a aplicação dos limites  $C_x^e$  e  $C_y^e$  sobre elementos maiores tende a impedir a formação de múltiplos elementos estruturais, sendo esta uma característica de vital importância no processo de otimização topológica para fins comerciais. Após a malha ser refinada, existe a atualização dos limites  $C_x^e$  e  $C_y^e$ , incidindo agora sobre os elementos refinados, possibilitando uma relaxação das restrições (5.28) e (5.29). A relaxação possibilita ao algoritmo a correção das imperfeições do contorno material obtidas na solução anterior.

A abordagem combinada proposta resultou em uma ferramenta muito promissora para a determinação de topologias ótimas de problemas com formulações de flexibilidade mínima em placas semi-espessas.

## Capítulo 6

### Estruturas 2D sob Minimização da Massa

### Utilizando Elementos Tri3

#### 6.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um processo de otimização, que combina um esquema de otimização de leiaute sob critério de tensão com uma estratégia de refino  $h$ -adaptativo, com o objetivo de proporcionar leiautes ótimos estruturais prontos para a manufatura. Além disso, o método proposto proporciona: leiautes ótimos de alta definição; uma redução considerável do tamanho do problema de otimização, para uma resolução prescrita; um controle do erro relativo da solução da equação de estado. Visando a redução do custo computacional para a determinação do leiaute ótimo, é considerada uma relaxação da restrição local de tensão, pela sua transformação em um critério de medida global, representado por uma única restrição. Mais importante ainda, a utilização de uma medida de tensão global junto com o processo  $h$ -adaptativo possibilitou, além de um alto desempenho computacional, a determinação de leiautes ótimos com menos de 2% de violação do critério de tensão local.

Desde a introdução das técnicas de distribuição material para a determinação de leiautes ótimos, por Bendsoe & Kikuchi (1998), a maioria dos trabalhos têm sido relacionados a formulações de minimização da flexibilidade. Entretanto, para a obtenção de um leiaute “pronto” para a manufatura, é imprescindível a consideração de restrições locais de tensão. Porém, a consideração de restrições locais de tensão apresenta inúmeras dificuldades, que são:

- A necessidade de se considerar um grande número de restrições, necessárias para uma aproximação adequada do critério paramétrico de tensão local. Para assegurar uma aproximação adequada, estas restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição deve ser densa o suficiente, de

modo a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos.

- O comportamento altamente não linear das restrições de tensão, com relação as variáveis de projeto, o que requer a utilização de algoritmos de programação matemática muito robustos.

Um modo de evitar a utilização de um grande número de restrições é a transformação do critério de tensão local em um critério de medida global. A medida de tensão global é implementada como uma única restrição, reduzindo consideravelmente o custo computacional necessário para resolver o problema de otimização. Diferentes critérios de tensão com medidas globais têm sido propostos para a solução de problemas de otimização de leiaute. Entre estes podem ser citados: a medida de Kreisselmeier-Steinhauser e a de Park-Kikuchi, ver Yang & Chen (1996); as medidas de média- $p$  e de norma- $p$ , ver Duysinx & Sigmund (1998). A desvantagem de se utilizar uma medida global é o controle fraco do critério de tensão local. Entretanto, como pode ser verificado na seção 6.6, o processo proposto produz leiautes ótimos que violam, em menos de 2%, o critério de tensão local.

A maioria dos problemas de otimização de leiaute é baseada na abordagem de *pixel*, na qual utiliza-se uma malha refinada homogênea de elementos retangulares. Conseqüentemente, para obter uma interface material/vazio que propicie um leiaute ótimo com uma resolução refinada, é necessário empregar um elemento de pequena dimensão, definindo desta forma o tamanho do *pixel*. A utilização de *pixel* de tamanho reduzido aumenta significativamente o número de variáveis de projeto, tornando inviável o problema de otimização. Diferentes métodos foram propostos com a intenção de reduzir o tamanho do problema, para uma determinada resolução final da interface material/vazio. Entre estes métodos estão os métodos de otimização estrutural evolutivos, ver Christie *et al.* (1998), Chu *et al.* (1997), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000) e Reynolds *et al.* (1999). A desvantagem destes métodos é a utilização de uma estratégia heurística para a adição e remoção de elementos, a qual não pode ser determinada de maneira efetiva.

Uma diferente abordagem empregada com o objetivo de gerar uma interface material/vazio de alta qualidade, é a solução de um problema de otimização de leiaute seguido por um processo de otimização de forma, ver Bendsoe & Rodrigues (1991). Outro método, proposto por Schwarz *et al.* (2001), considera a solução de

uma seqüência de otimização de leiaute seguido por um processo de “remalhamento”. O “remalhamento” é realizado uma vez que o domínio, definido pela interface material/vazio, do leiaute ótimo é determinado, e o seu contorno aproximado por curvas do tipo *spline*. Em ambos os métodos as dificuldades podem ocorrer no processo de identificação da interface material/vazio do leiaute ótimo resultante. No trabalho de Costa Jr. & Alves (2003) é proposta uma nova abordagem que combina otimização de leiaute com uma técnica de refino *h*-adaptativo.

Neste capítulo é apresentado um método de otimização de leiaute combinado com uma estratégia de refino *h*-adaptativo, o qual é capaz de gerar um leiaute ótimo “pronto” para a manufatura, tendo uma interface material/vazio definida com grande resolução. Além disso, o processo de refino *h*-adaptativo utilizado reduz consideravelmente o tamanho do problema de otimização, para uma resolução pré-definida do leiaute ótimo, e limita o erro da solução da equação de estado.

O método de otimização de leiaute utiliza uma medida global do critério de tensão de falha com relaxação  $\epsilon$ , a qual é descrita nas subseções 6.2.1 e 6.3.1. O método, quando combinado com o processo de refino *h*-adaptativo, proporciona uma seqüência de leiautes ótimos que tendem a satisfazer pontualmente o critério de tensão de falha com relaxação  $\epsilon$ .

O processo proposto consiste na resolução de uma seqüência de otimização de leiaute seguida por um esquema de refino *h*-adaptativo, como ilustrado nas Figs. 6.1, 6.2 e 6.3, nas quais podem ser visto uma violação do critério de falha inferior a 2%. Note ainda que, o tamanho do menor elemento do leiaute ótimo final define a resolução da interface material/vazio.

O número total de níveis de refinamentos *h*-adaptativos é definido *a priori*, de acordo com a resolução especificada. Note que, cada elemento *h*-refinado tem uma aresta de tamanho correspondente à metade do elemento original, como ilustrado nas Figs. 4.5(a,b). Daí pode-se estimar a resolução prescrita final, de acordo com o número total de níveis de refinamentos *h*-adaptativos aplicados à malha inicial.

Neste trabalho, a otimização de leiaute é resolvida como um problema de distribuição ótima de material, no qual é feito uso de um modelo microestrutural do tipo SIMP. Entretanto, esta abordagem é suscetível a problemas de instabilidades de tabuleiro, ver Bendsoe (1995), Sigmund & Petersson (1998) e Bendsoe & Sigmund



(1999). Assim, para contornar o problema de instabilidade de solução e reduzir a dependência do leiaute ótimo final, com relação à malha inicial, impõe-se uma restrição às componentes do gradiente da densidade relativa, como proposto por Petersson & Sigmund (1998). Aqui é considerado um elemento Tri3, o qual interpola tanto as densidades relativas como também as componentes do campo de deslocamento, de acordo com a Fig. 4.1, com o objetivo de simplificar a imposição da restrição local imposta às componentes do gradiente da densidade relativa. Esta abordagem produz um processo de otimização de leiaute muito eficiente e robusto. A principal desvantagem desta abordagem é a presença de uma camada de material com densidade intermediária, distribuída ao longo da interface material/vazio. Entretanto, esta inconveniência é consideravelmente minimizada com a utilização do esquema de refino  $h$ -adaptativo proposto.

O objetivo deste trabalho é minimizar a massa de estruturas bidimensionais, submetida às: restrições locais de tensão; restrições de limites laterais; restrições laterais impostas às componentes do gradiente da densidade relativa, em cada ponto do domínio. Um problema típico de otimização de leiaute está ilustrado nas Figs. 2.1(a,b), onde se considera que:

- $\Omega$  é o domínio do corpo a ser considerado;
- $\partial\Omega$  é o contorno do domínio, tal que,  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ;
- $\Gamma_u$  é a parte do contorno com deslocamento prescrito, i.e.,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;
- $\Gamma_t$  é a parte do contorno com tração prescrita, i.e.,  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ ;
- $\mathbf{b}$  é a força de corpo;
- $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  e  $H = \{\bar{\mathbf{u}} + H_o\}$  são os conjuntos das variações e deslocamentos admissíveis respectivamente.

O campo de deslocamento é obtido através da solução do problema de valor de contorno: Encontrar  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \quad \mathbf{v} \in H_o \quad (6.1)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (6.2)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (6.3)$$

Aqui,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\circ)$  é o operador definido por:  $\boldsymbol{\varepsilon}(\circ) = \frac{1}{2}(\nabla(\circ) + \nabla(\circ)^T)$  que representa a parte simétrica do gradiente do campo em  $(\circ)$ .

## 6.2 Definição do modelo material

Para resolver o problema de otimização topológica é utilizada uma abordagem material, a qual considera a microestrutura como sendo porosa, sendo caracterizada por sua densidade relativa. As propriedades efetivas das densidades intermediárias têm base nas teorias de materiais porosos, representada pelo modelo SIMP, ver Bendsoe & Sigmund (1999), Duysinx & Sigmund (1998) e Duysinx & Bendsoe (1998). Neste modelo, o módulo de Young efetivo é definido em termos da densidade relativa  $\rho$ , de modo que

$$E(\rho) = \rho^\eta E_0 \quad (6.4)$$

onde  $E_0$  é o módulo de Young relativo ao material completamente denso e  $\eta$  é o parâmetro de penalidade do modelo. Aqui, considera-se  $\eta = 4$ .

Além disso, com o objetivo de considerar restrições de tensão é definida uma medida para a tensão efetiva  $\sigma^*(\rho)$ , de acordo com os trabalhos de Duysinx & Sigmund (1998) e Duysinx & Bendsoe (1998), que é dada por:

$$\sigma^*(\rho) = \frac{\sigma(\rho)}{\rho^\eta} \quad (6.5)$$

Agora, com a tensão efetiva definida pela eq. (6.5), introduz-se uma restrição de tensão local, que define um critério de falha do material em termos da tensão efetiva de von Mises, dada como:

$$\sigma_{eq}^*(\rho) = \frac{\sigma_{eq}(\rho)}{\rho^\eta} \leq \sigma_y \quad (6.6)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão admissível.

### 6.2.1 Critério de tensão de falha com relaxação $\epsilon$ .

O problema de otimização topológica sob restrições de tensão local está sujeito a problemas de singularidade, devido à degeneração do espaço de projeto. Para contornar o problema de singularidade, como proposto por Cheng & Guo (1997), considera-se uma relaxação  $\epsilon$  na restrição de tensão, de modo que

$$\rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \leq 0. \quad (6.7)$$

Esta relaxação atua sobre a parte degenerada do espaço de projeto, possibilitando a criação e remoção de furos sem violar a restrição de tensão.

## 6.3 Formulação do problema com relaxação

A formulação do problema de otimização da topologia de um corpo bidimensional, sujeito às restrições de tensão com relaxação  $\epsilon$ , consiste na determinação do campo de densidade relativa  $\rho(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , solução de:

$$\min \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (6.8)$$

sujeito às restrições:

(i) Restrição de tensão com relaxação

$$\rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega; \quad (6.9)$$

(ii) Restrição de limites laterais

O campo de densidade relativa  $\rho(\mathbf{x})$  é restrito ao intervalo  $[\rho^{\text{inf}}, 1]$ . Aqui, denota-se  $\rho_{\text{inf}} = 0,001$  para o limite inferior. Daí,

$$\rho_{\text{inf}} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.10)$$

## (iii) Restrições de estabilidade

A imposição das restrições de estabilidade no processo de otimização topológica, propostas por Petersson & Sigmund (1998), têm as seguintes finalidades:

- Assegurar a existência da solução;
- Evitar a ocorrência de instabilidades de tabuleiro;
- Reduzir a dependência da otimização de leiaute com a malha inicial.

Essas condições são dadas por

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 \leq C_x^2 \quad (6.11)$$

e

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 \leq C_y^2 \quad (6.12)$$

As constantes  $C_x$  e  $C_y$  impõem um limite superior às componentes do gradiente da densidade relativa e estão definidas na subseção 6.4.1.

### 6.3.1 Restrição de tensão com relaxação integrada

No problema de otimização acima, a restrição de tensão efetiva com relaxação  $\epsilon$ , definida pela eq. (6.7), deve ser satisfeita para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , o que representa uma restrição paramétrica. Um método efetivo de trabalhar com restrições paramétricas consiste na relaxação da condição pontual (critério local) através da consideração de uma restrição integrada, i.e. da utilização de um critério global. Neste trabalho, propõe-se o seguinte critério global:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \right\rangle^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 0, \quad (6.13)$$

onde é definido que  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \max\{0, f(\mathbf{x})\}$ , representando a parte positiva de  $f(\mathbf{x})$ . Esta medida global é denominada como média- $p$  integral. No caso de  $p \rightarrow \infty$ , a restrição média- $p$  aproxima, no limite, a restrição pontual

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \right\rangle \right| \leq 0. \quad (6.14)$$

Entretanto, quando  $p \rightarrow \infty$  o problema torna-se mal condicionado, fazendo com que o critério de falha integral tenda a ser influenciado por apenas um valor de pico do campo de tensão, enquanto as outras restrições são ignoradas. Isto pode ocasionar um comportamento oscilatório do algoritmo de otimização, possibilitando a falha da convergência do processo de otimização. Daí, a escolha de  $p$  deve resultar de um compromisso de resultados numéricos. Para as aplicações testadas neste capítulo foi considerado  $p = 6$ .

## 6.4 Formulação discreta do problema

O problema é particularizado para estruturas bidimensionais e solucionado com a aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin. O método utiliza elementos finitos Tri3, que interpolam tanto as variáveis do campo de deslocamentos  $(u, v)$  como também o campo de densidade relativa  $\rho$ , como mostrado na Fig. 4.1. As variáveis de projeto são definidas pela densidade relativa dos nós da malha. É importante notar que vários problemas de instabilidade de tabuleiro têm sido observados com a utilização de elementos de baixa ordem de interpolação. Entretanto, a imposição de uma restrição de limite sobre as componentes de  $\nabla \rho$  tem mostrado ser muito eficiente, evitando o aparecimento destas instabilidades. Como o gradiente da densidade relativa é constante no interior de cada elemento, é suficiente impor apenas que:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 \leq (C_x^e)^2 \quad (6.15)$$

e

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 \leq (C_y^e)^2, \quad e = 1, \dots, n_e. \quad (6.16)$$

Aqui,  $n_e$  denota o número total de elementos na malha.

### 6.4.1 Definição dos limites $C_x^e$ e $C_y^e$

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 4.2, sendo  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $p/ \ i = 1, \dots, 3$  as coordenadas dos vértices e  $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)$  as coordenadas do baricentro do elemento Tri3. Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|\mathbf{d}_i\| \quad p/ \ i = 1, \dots, 3 \quad (6.17)$$

pode-se definir

$$C_x^e = C_y^e = \frac{1}{d_{\min}}. \quad (6.18)$$

Uma modificação dos limites  $C_x^e$  e  $C_y^e$ , deve ser realizada se no mínimo uma das arestas do elemento coincide com algum eixo de simetria. Aqui, são considerados dois casos possíveis, que são:

#### (i) Eixo de simetria - $x$

Neste caso, considera-se que a aresta  $\overline{ab}$  do elemento coincide com o eixo- $x$  de simetria, o que, como ilustrado na Fig. 4.3, requer a imposição de  $v = 0$  e  $(\partial \rho / \partial y) = 0$ . A satisfação desta última imposição pode ser alcançada redefinindo  $C_y^e$  como  $C_y^e = 0$ .

#### (ii) Eixo de simetria - $y$

Agora, considera-se que a aresta  $\overline{bc}$  do elemento coincidente com o eixo- $y$  de simetria. Assim, de acordo com a ilustração na Fig. 4.4, deve-se ter:  $u = 0$  e  $(\partial \rho / \partial x) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $C_x^e = 0$ .

### 6.4.2 Formulação discreta do problema de otimização

O problema discreto de otimização de leiaute pode ser formulado como: Determinar  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ , solução de:

$$\min f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad (6.19)$$

sujeito às restrições:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{u}(\mathbf{p})) = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \right\rangle^p d\Omega \right\}^{1/p}, \quad (6.20)$$

$$g_{2e-1}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 - (C_x^e)^2 \right\} \leq 0, \quad (6.21)$$

$$g_{2e}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 - (C_y^e)^2 \right\} \leq 0, \quad (6.22)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$ ;  $\mathbf{p} \in \mathbf{X}$  com  $\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\inf} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\sup}, i = 1, \dots, n \right\}$  e  $n$  denotando o número de nós da malha de elementos finitos. Aqui, define-se que  $\beta = 1/d_{\max}$ , sendo  $d_{\max} = \max_{i=1,3} \|\mathbf{d}_i\|$ .

Para resolver o problema de otimização é aplicado o Método do Lagrangiano Aumentado que consiste na solução de uma seqüência de problemas de mínimo com restrições do tipo caixa. A solução do problema com restrições do tipo caixa foi obtida pela aplicação do Método das Assíntotas Móveis proposto por Svanberg (1987).

## 6.5 Refino da malha com adaptatividade $h$

A descrição geral do método utilizado neste capítulo é análoga à descrita na subseção 4.3.1. A estratégia de refino  $h$ -adaptativo é idêntica à descrita na subseção 4.3.2. O mesmo ocorre com o processo de suavização do tipo Laplaciano condicional, descrito na subseção 4.3.3. Os estimadores de erro são os mesmos definidos na subseção 4.3.4 e o critério de refino foi apresentado na subseção 4.3.5.

## 6.6 Resultados

Agora, são apresentadas algumas aplicações com o objetivo de avaliar a performance do procedimento proposto. Para mostrar a evolução da estratégia de refino são ilustrados todos os leiautes ótimos intermediários e as malhas de elementos finitos associadas. Além do mais, por simplicidade, utiliza-se o mesmo material em todos os casos. O módulo de Young  $E_o = 215,0$  GPa e o coeficiente de Poisson  $\nu_o = 1/3$ .

### Problema 6.1:

Aqui, considera-se que a placa da Fig. 6.1(a) está fixada na borda esquerda e submetida a uma carga distribuída  $P=150110,0$  kN/m no lado oposto. A malha inicial, mostrada na Fig. 6.1(a), tem 2299 elementos e 1216 nós; a segunda malha refinada, mostrada na Fig. 6.2(a), tem 6030 elementos e 3094 nós; a malha refinada final, mostrada na Fig. 6.3(a), tem 17175 elementos e 8683 nós.

A seqüência de leiautes ótimos intermediários mostrando a evolução da qualidade do contorno material, resultante do processo de refino  $h$ -adaptativo, está ilustrada nas Figs. 6.1(b), 6.2(b) e 6.3(b). Além disso, a distribuição do critério de falha está ilustrada nas Figs. 6.1(c), 6.2(c) e 6.3(c). Neste ponto, pode-se verificar, como ilustrado na Fig. 6.3(c), a ocorrência de uma violação de 0,5% no critério de falha, associada ao leiaute ótimo final. Pode-se, também, notar que a seqüência de leiautes ótimos tende a convergir para um leiaute ótimo final, cuja interface material/vazio é nitidamente definida e cujo critério de tensão seja satisfeito ponto a ponto.



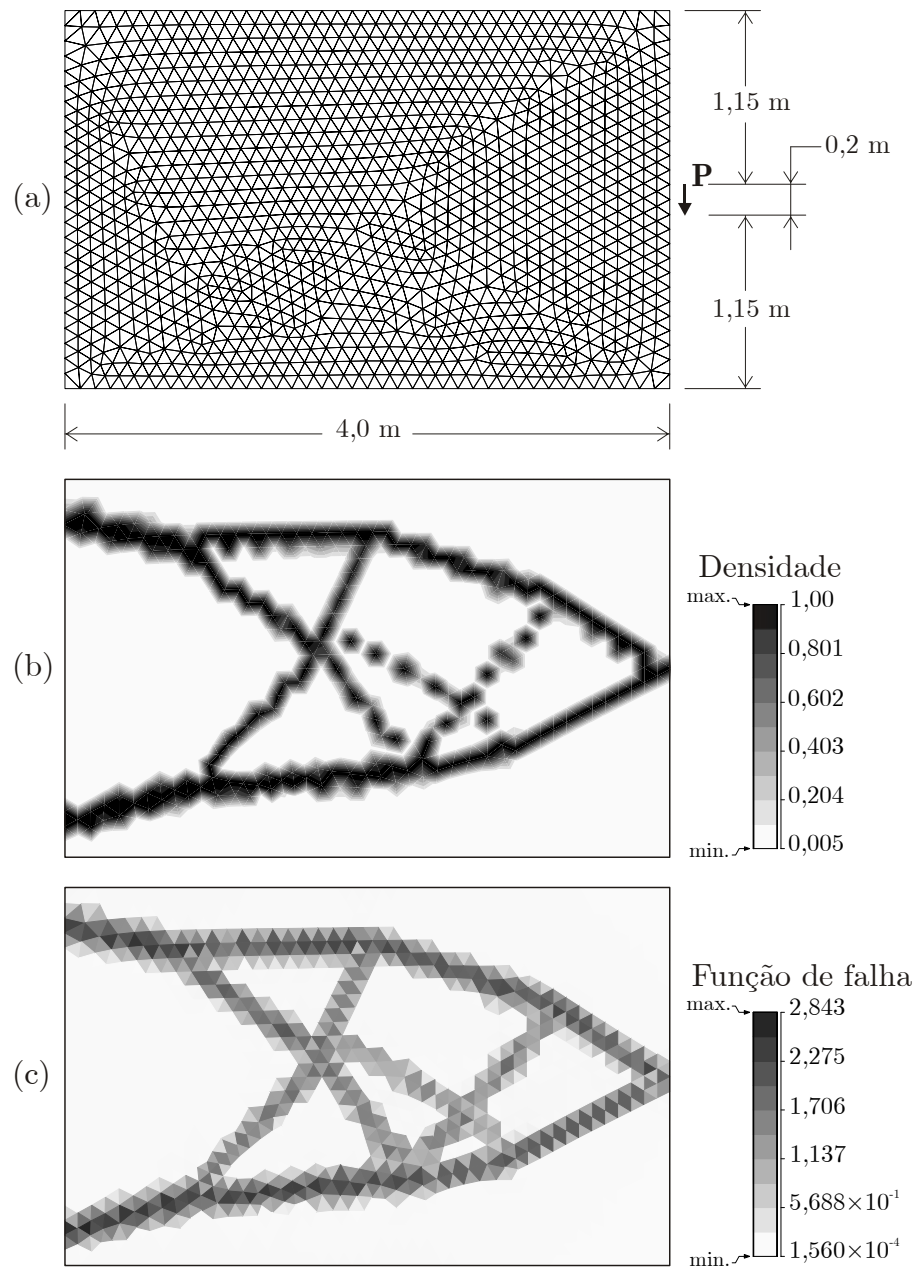


Figura 6.1: Resultado do prob (6.1), malha inicial com 2299 elementos.

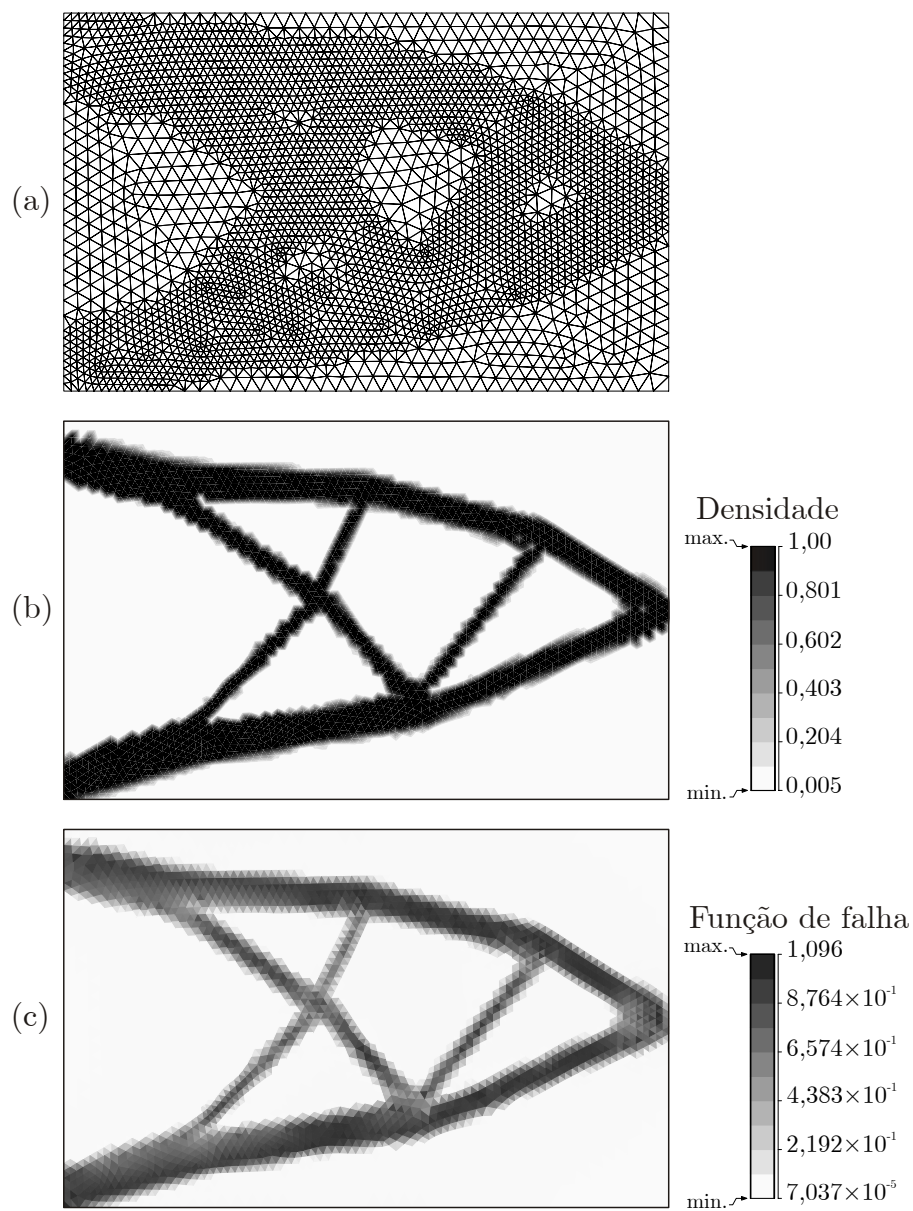


Figura 6.2: Resultado do prob (6.1), segunda malha com 6030 elementos.

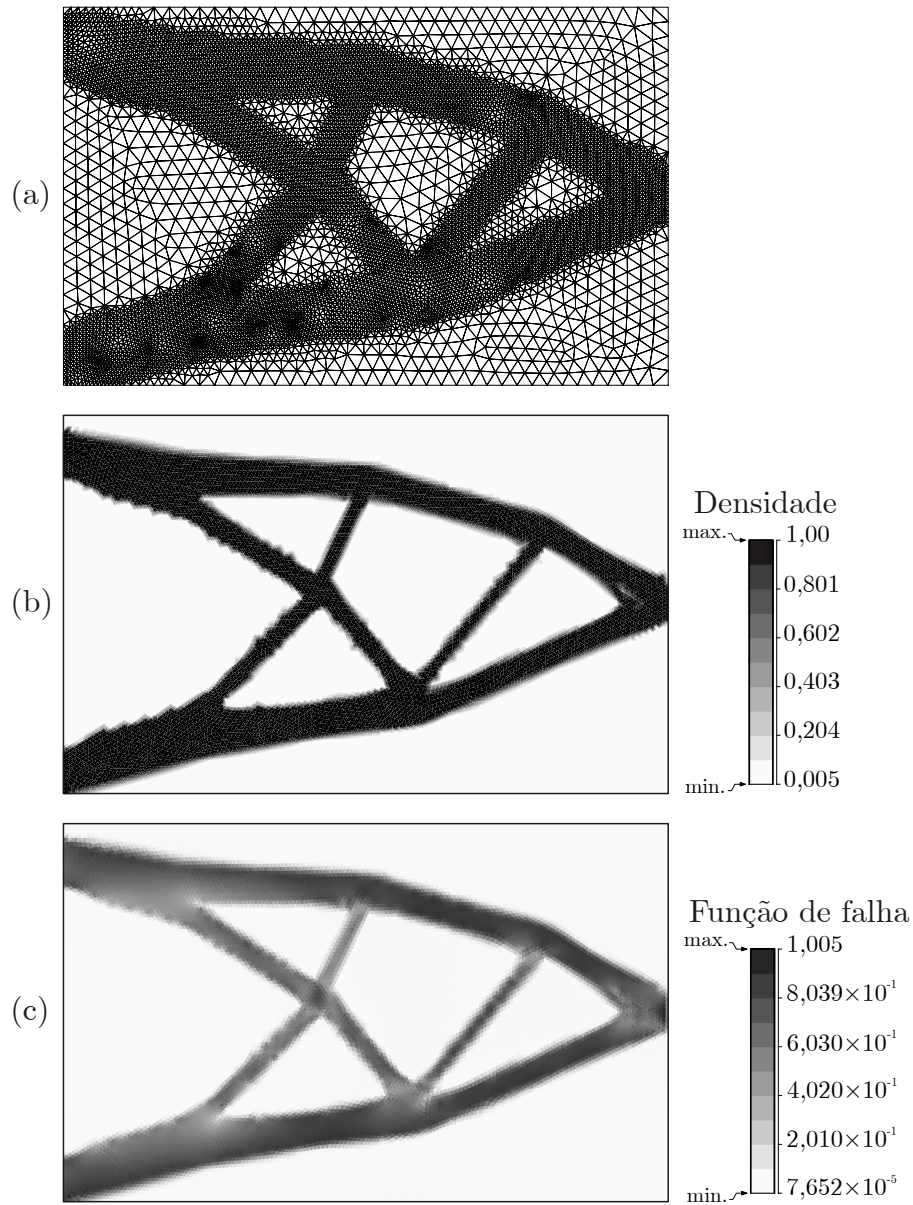


Figura 6.3: Resultado do prob (6.1), terceira malha com 17175 elementos.

### Problema 6.2:

Agora, considera-se que uma placa está engastada na lateral esquerda e na direita, submetida a uma carga distribuída  $P=259999,0$  kN/m localizada ao meio da borda superior, e sujeita a um estado plano de tensão, como ilustrado na Fig. 6.4(a). A malha inicial, mostrada na Fig. 6.4(a), tem 1776 elementos e 949 nós. A segunda malha refinada, mostrada na Fig. 6.5(a), tem 4136 elementos e 2149 nós e a malha refinada final, mostrada na Fig. 6.6(a), tem 10995 elementos e 5610 nós.

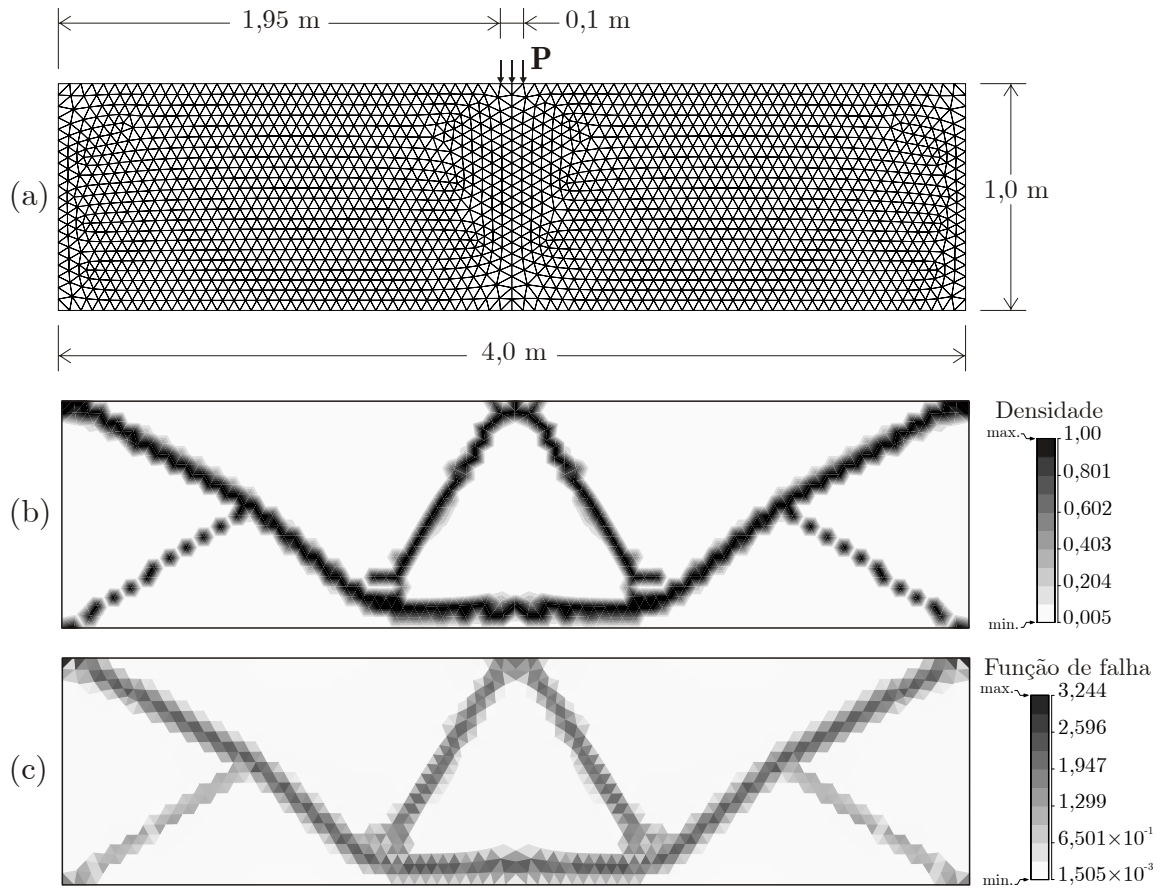


Figura 6.4: Resultado do prob (6.2), malha inicial com 1776 elementos.

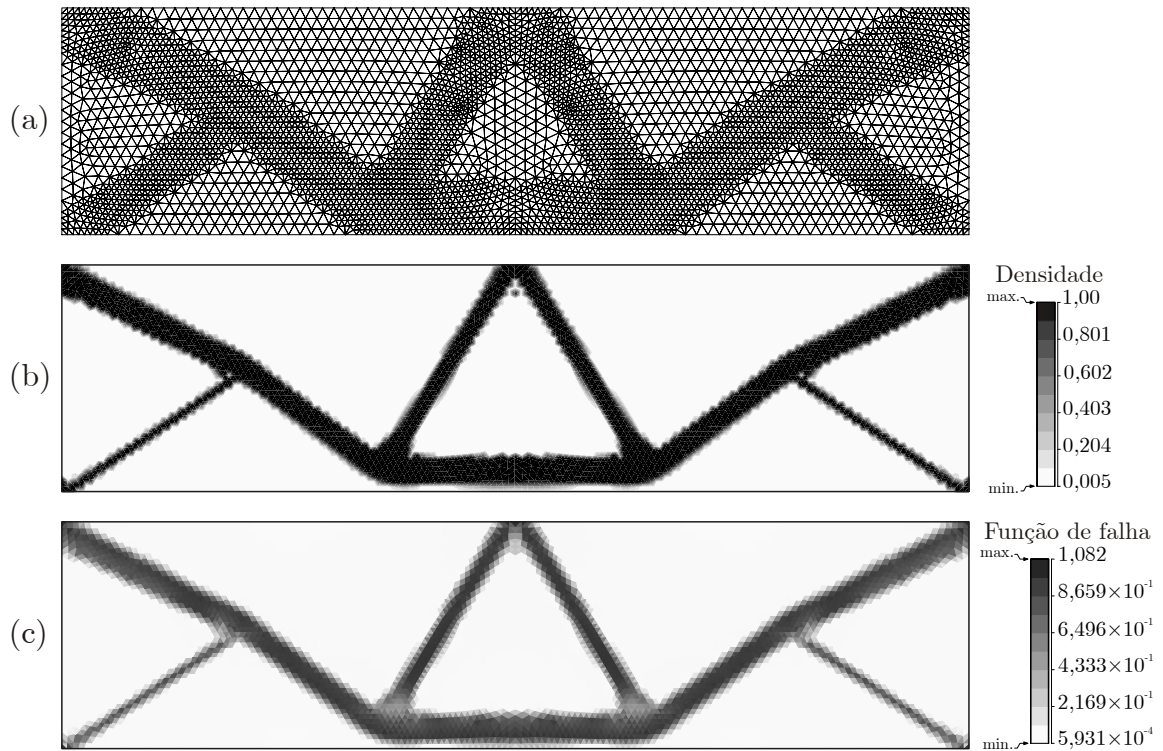


Figura 6.5: Resultado do prob (6.2), segunda malha com 4136 elementos.

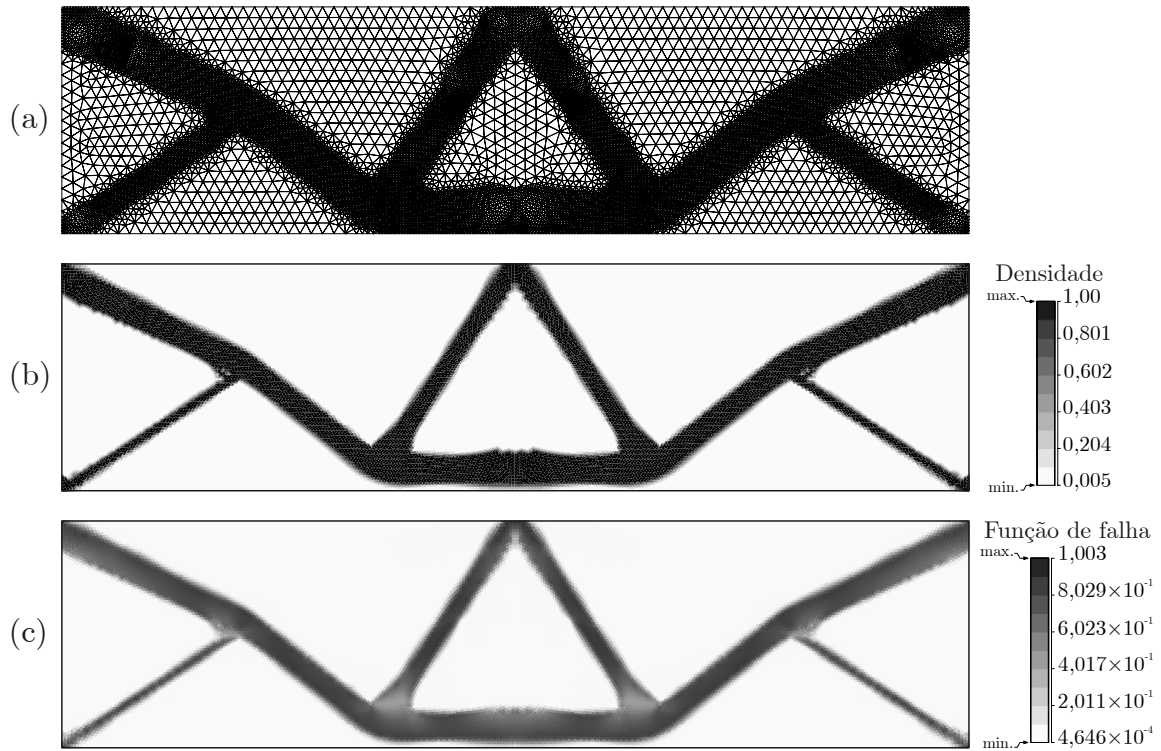


Figura 6.6: Resultado do prob (6.2), terceira malha com 10995 elementos.

A evolução dos leiautes ótimos mostrando o aumento da resolução do contorno material está ilustrada nas Figs. 6.4(b), 6.5(b) e 6.6(b). A distribuição do critério de falha, associada à topologia ótima final, está ilustrada na Fig. 6.6(c), na qual verifica-se uma violação de 0,35%. Adicionalmente, como no exemplo anterior, pode-se ver que a sequência de leiautes ótimos tende a convergir para um leiaute ótimo final, satisfazendo o critério de tensão com relaxação de maneira pontual.

### Problema 6.3:

Neste caso, considera-se uma placa, a qual está submetida a duas cargas distribuídas de mesma intensidade, tal que  $\mathbf{P}=259999,0 \text{ kN/m}$ , mas aplicadas em sentidos opostos, como ilustrada na Fig. 6.7(a). A malha inicial, mostrada na Fig. 6.7(a), tem 837 elementos e 463 nós. A segunda malha refinada, mostrada na Fig. 6.8(a), tem 2048 elementos e 1078 nós. A terceira malha refinada, mostrada na Fig. 6.9(a), tem 5629 elementos e 2880 nós e a malha final ilustrada na Fig. 6.10(a) tem 16674 elementos e 8420 nós.

A evolução dos leiautes ótimos mostrando o aumento da resolução do contorno material está ilustrada nas Figs. 6.7(a), 6.8(a), 6.9(a) e 6.10(a). A sequência de leiautes ilustrando a distribuição do critério de falha pode ser vista nas Figs. 6.7(c),

6.8(c), 6.9(c) e 6.10(c). Aqui, o leiaute ótimo final, mostrado na Fig. 6.10(c) viola em 0,45% o critério de tensão com relaxação.

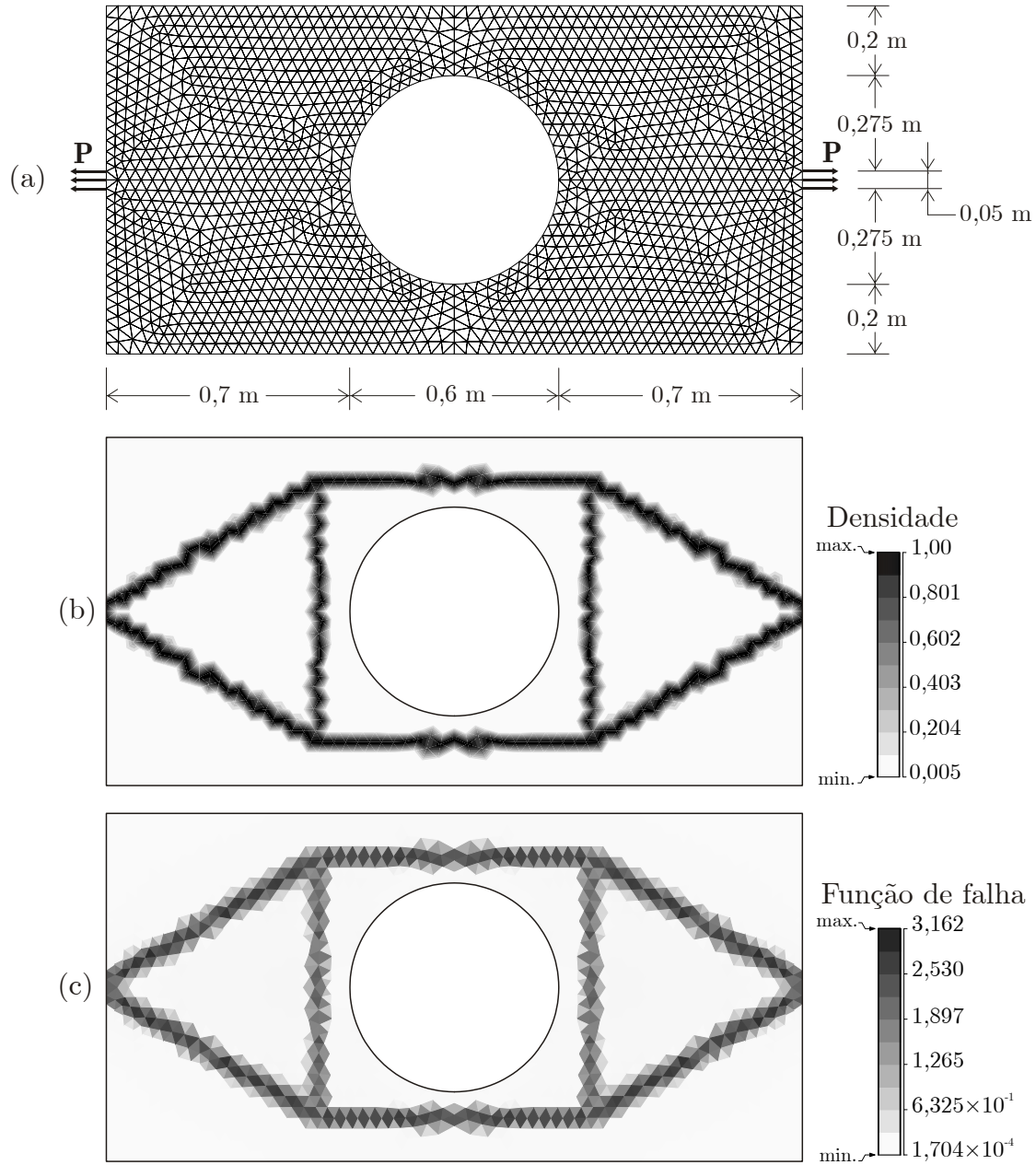


Figura 6.7: Resultado do prob (6.3), malha inicial com 837 elementos.



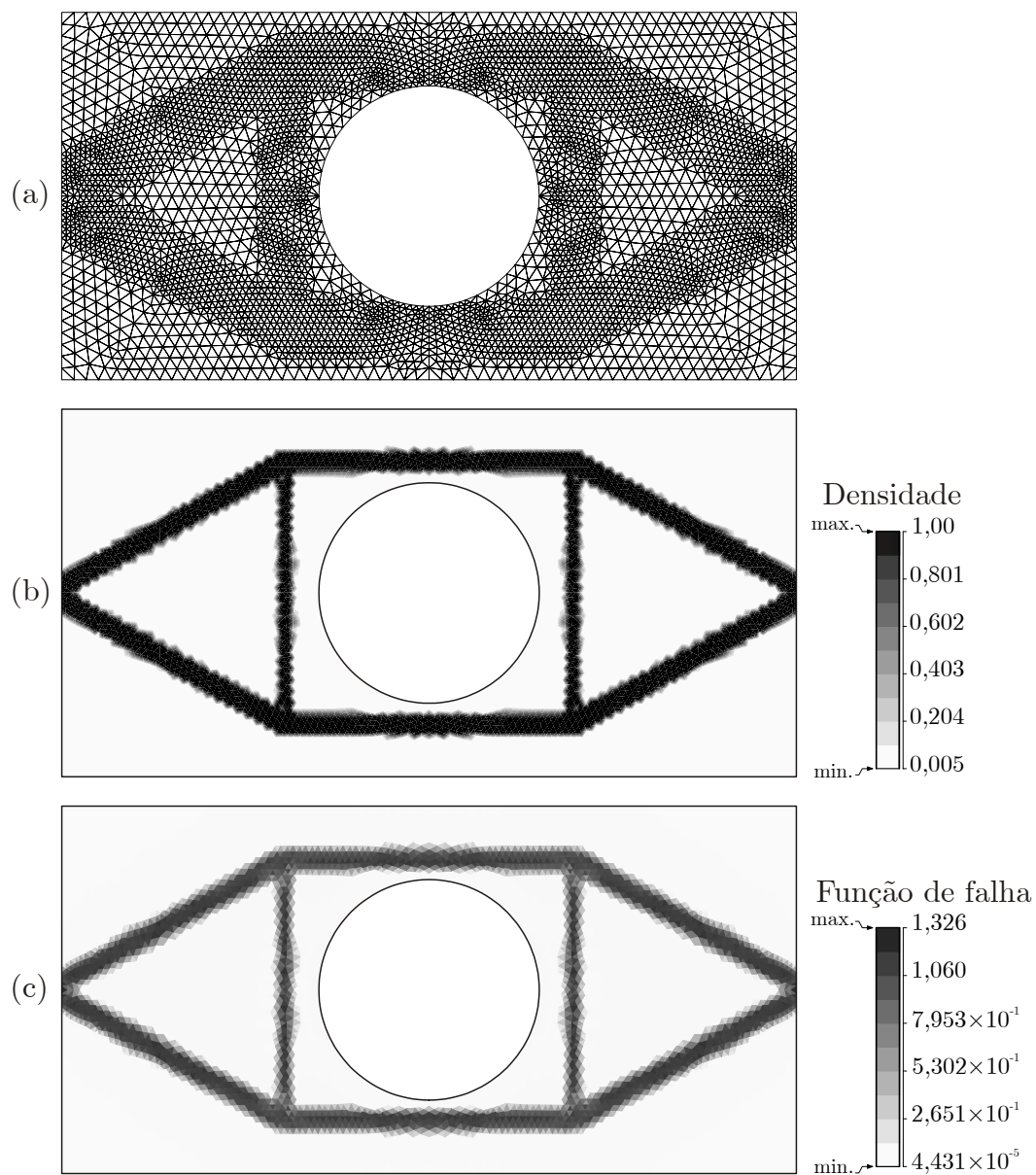


Figura 6.8: Resultado do prob (6.3), segunda malha com 2048 elementos.

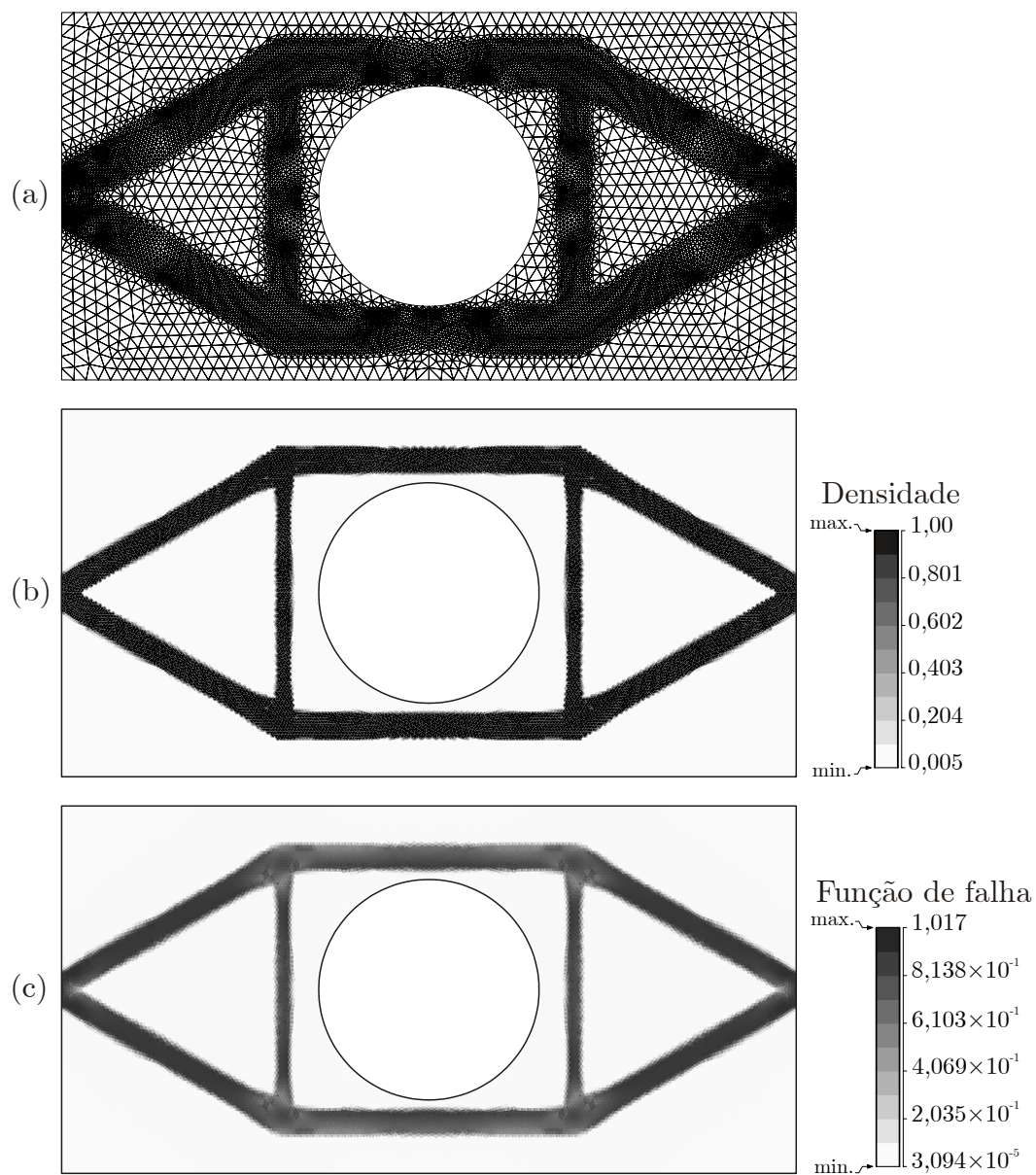


Figura 6.9: Resultado do prob (6.3), terceira malha com 5629 elementos.



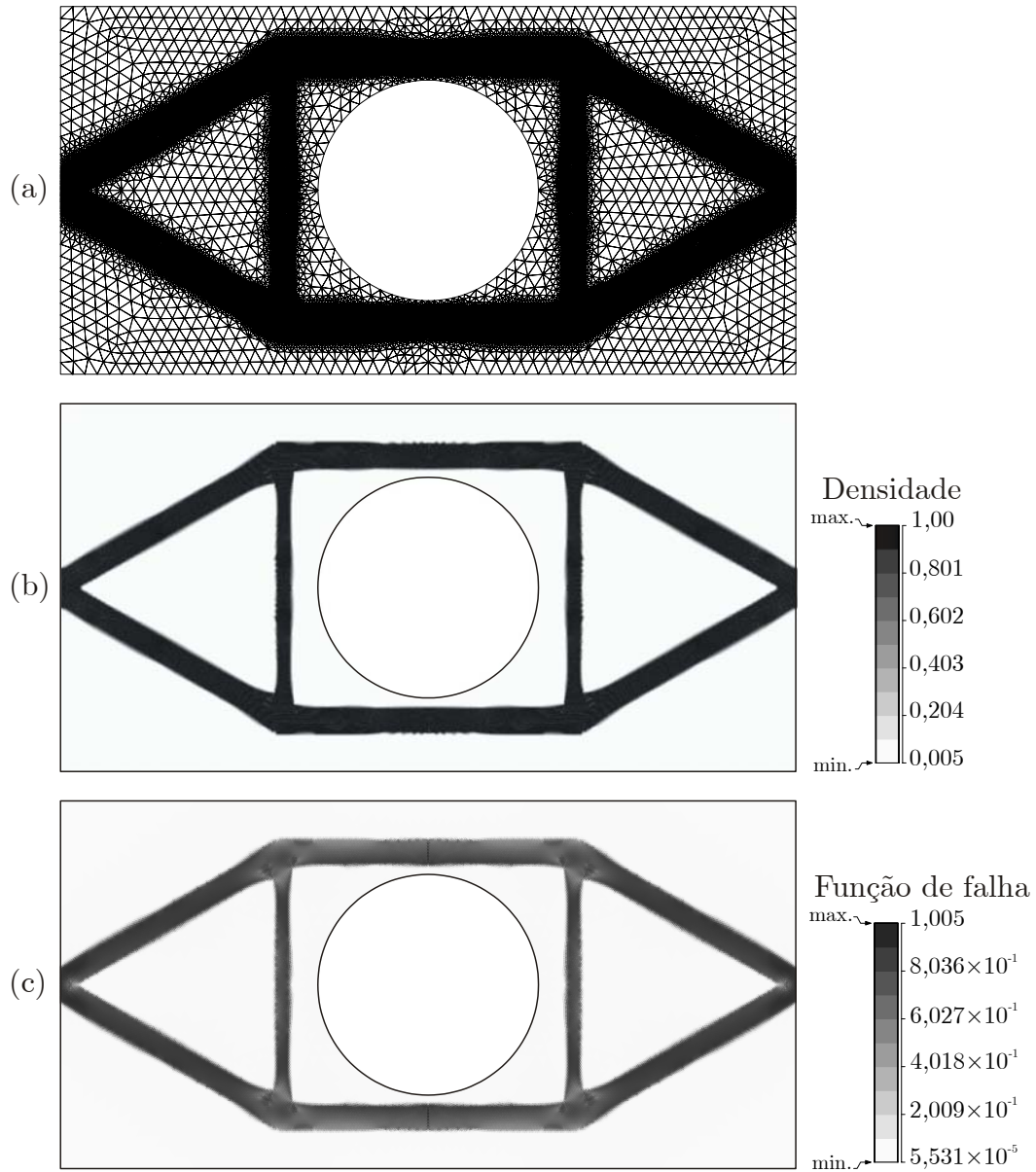


Figura 6.10: Resultado do prob (6.3), quarta malha com 16674 elementos.

#### Problema 6.4:

Neste caso, considera-se uma viga em L engastada na borda superior, submetida a uma carga distribuída  $\mathbf{P}=150110,0$  kN/m na borda lateral direita e sujeita a um estado plano de tensão, como ilustrado na Fig. 6.11(a). A malha inicial, mostrada na Fig. 6.11(a), tem 1412 elementos e 771 nós. A segunda malha refinada, mostrada na Fig. 6.12(a), tem 4772 elementos e 2492 nós e a malha final, mostrada na Fig. 6.13(a), tem 15915 elementos e 8143 nós.

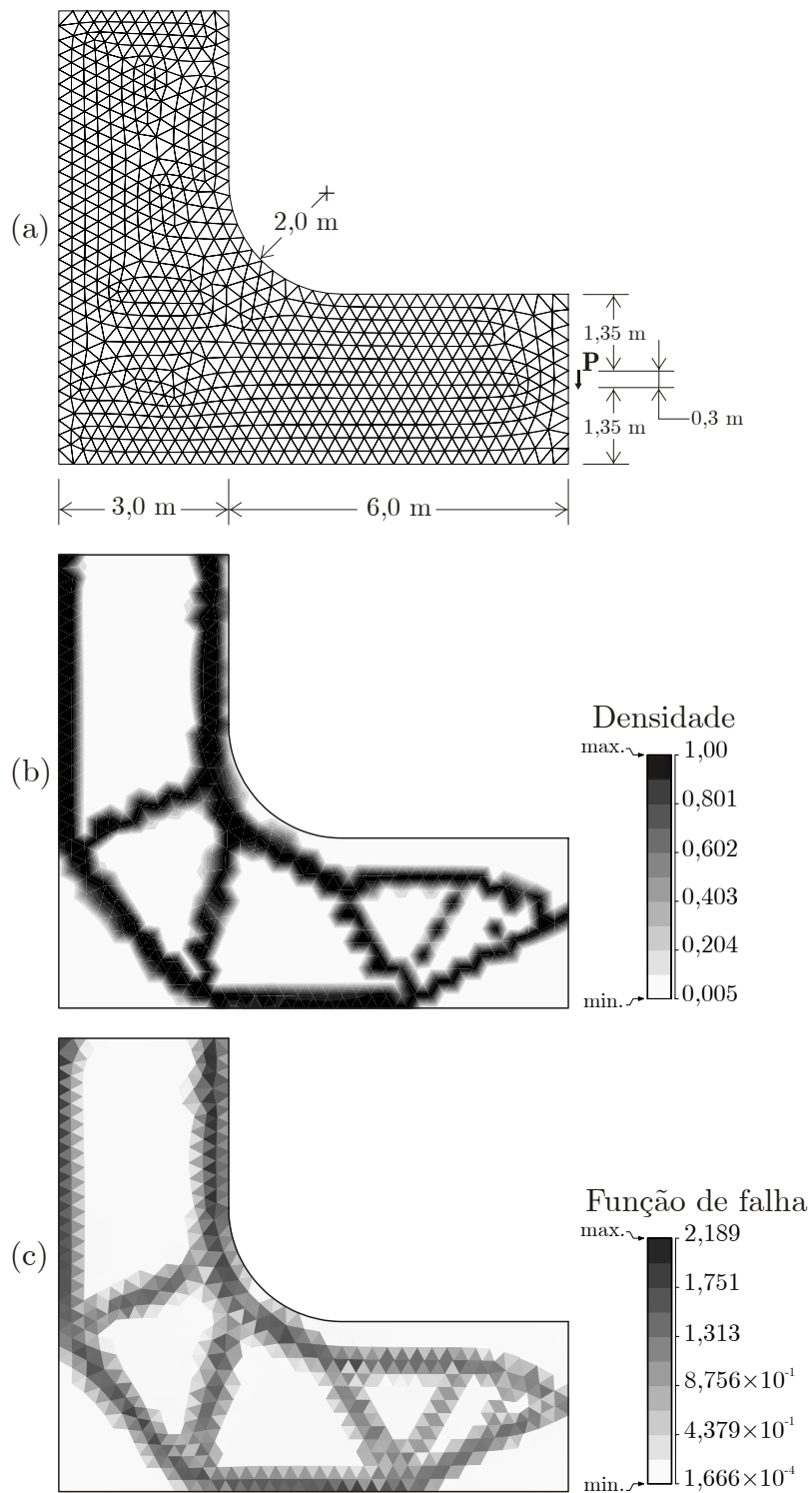


Figura 6.11: Resultado do prob (6.4), malha inicial com 1412 elementos.

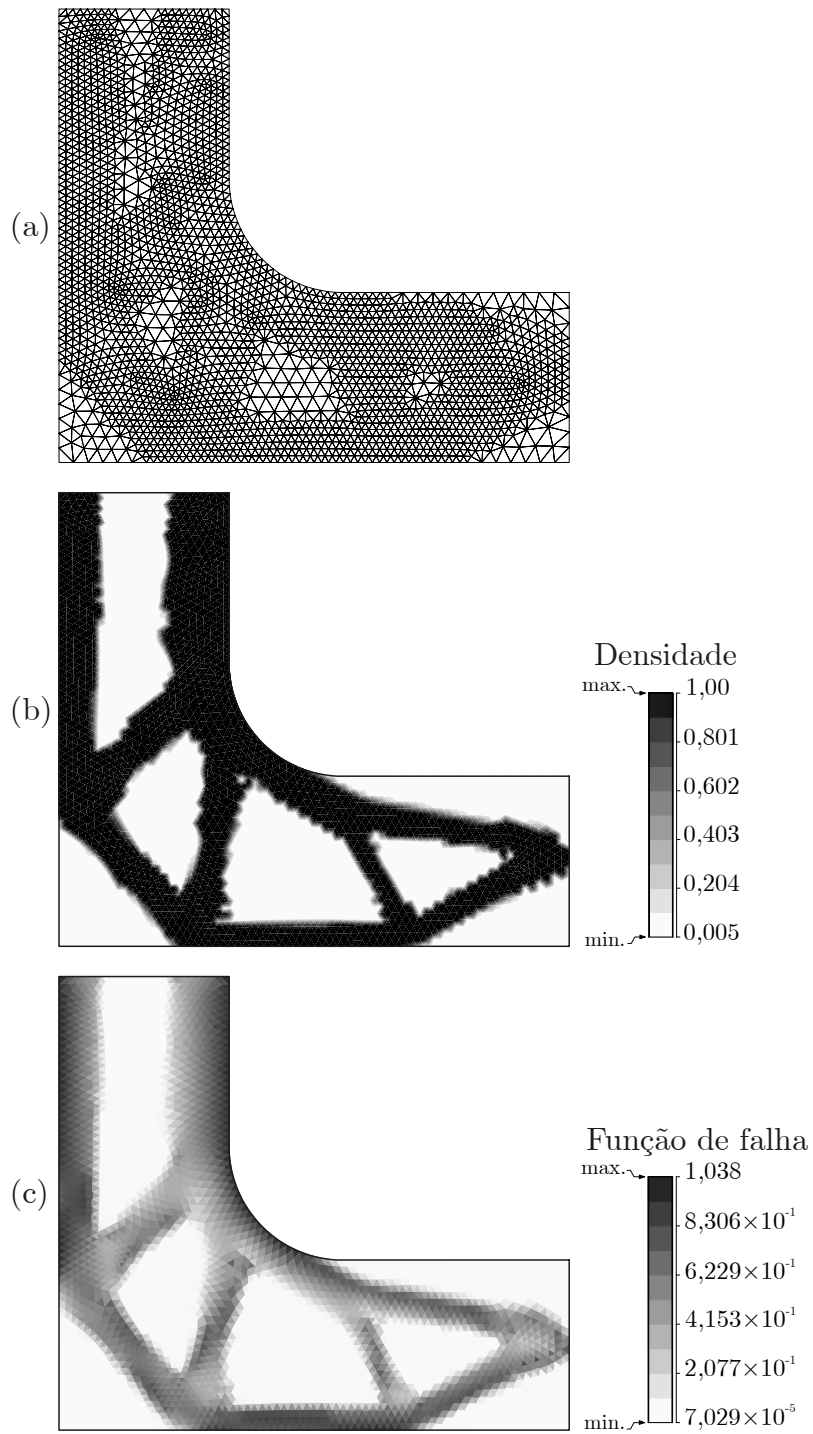


Figura 6.12: Resultado do prob (6.4), segunda malha com 4772 elementos.

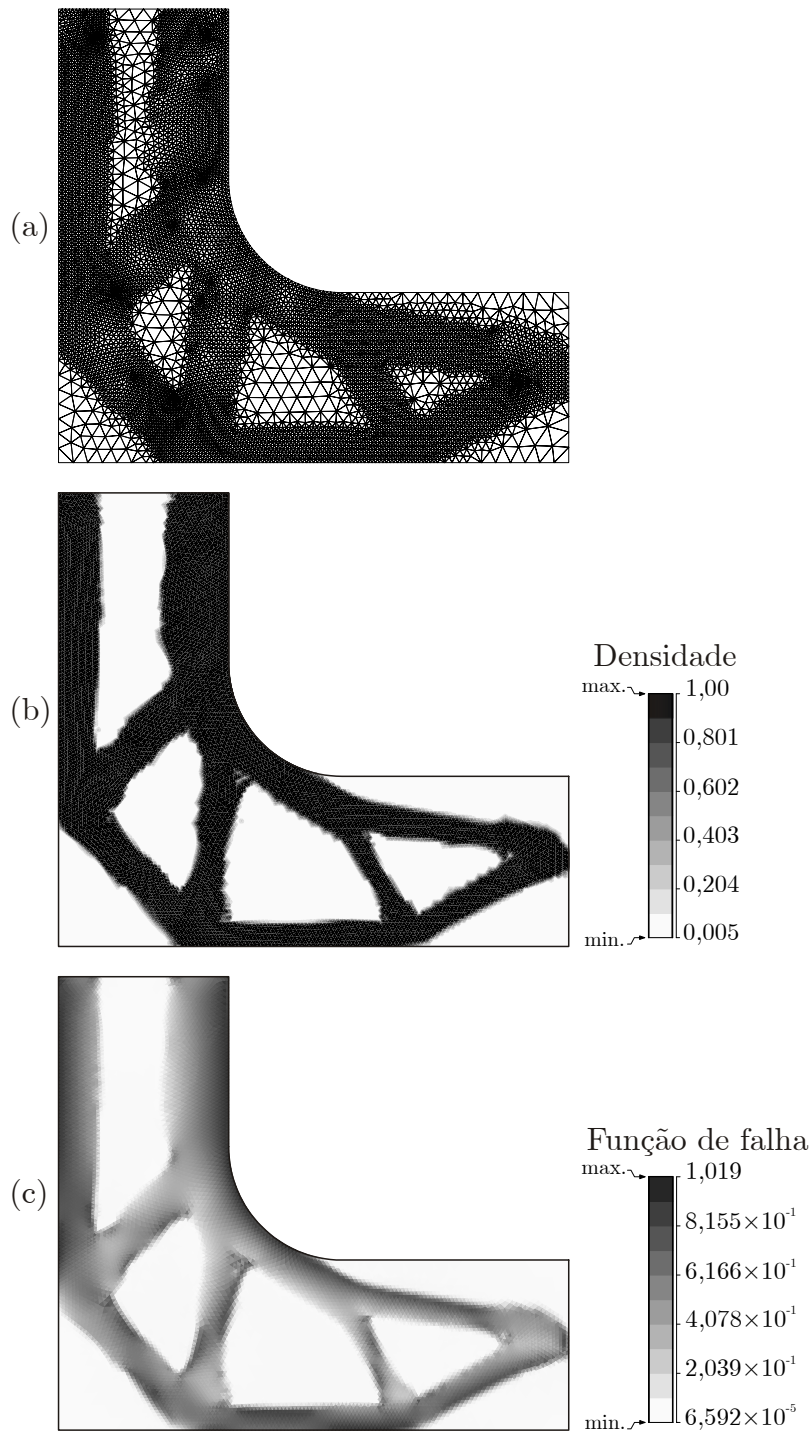


Figura 6.13: Resultado do prob (6.4), terceira malha com 15915 elementos.

A sequência de leiautes ótimos mostrando o aumento da resolução do contorno material está ilustrada nas Figs. 6.11(b), 6.12(b) e 6.13(b). As distribuições do critério de tensão com relaxação, por sua vez, podem ser vista nas Figs. 6.11(c), 6.12(c) e 6.13(c). Nota-se, entretanto, que o critério de falha do leiaute ótimo final, mostrado na Fig. 6.13(c), viola em 1,94% o critério de tensão sob relaxação.

## 6.7 Conclusão

O método proposto mostrou ser muito efetivo e robusto na geração de um leiaute “pronto” para a manufatura, cuja forma ótima é representada com uma alta resolução e livre de interpretações ambíguas. Adicionalmente, o processo não só reduz consideravelmente o tamanho do problema de leiaute, para uma dada resolução da topologia ótima final, como também limita o erro da solução da equação de estado. Com a imposição das restrições de caixa às componentes do gradiente da densidade relativa, evitou-se não só o problema de instabilidade de tabuleiro como também reduziu-se a dependência da topologia final com relação à malha inicial. Neste ponto, é importante enfatizar que embora o procedimento gere leiautes ótimos com uma violação de até 2% do critério de tensão, a evolução do critério de tensão com relaxação, para cada nível de refino  $h$ -adaptativo, tem mostrado uma descida monotônica em todos os casos testados. Isto sugere que a seqüência de leiautes ótimos tende a convergir para um leiaute ótimo final que satisfaz o critério de falha pontualmente.

Além disso, a utilização de um elemento finito de baixa ordem de interpolação e a consideração de um critério de falha global possibilitou uma drástica redução do custo computacional para a determinação do leiaute ótimo.

Com o intuito de minimizar a deterioração da malha, resultante do processo de refino  $h$ -adaptativo, introduziu-se um medidor de qualidade do elemento e um estimador de erro. Este procedimento conjuntamente com a estratégia de refino adotada foi suficiente para assegurar a qualidade da malha em todos os níveis de refino da malha.

A abordagem proposta resulta em uma ferramenta muito promissora para a determinação de leiautes ótimos “prontos” para a manufatura. Este último ponto é de fundamental importância para a geração de ferramentas de otimização comercialmente viáveis para a prática industrial.

## Referências Bibliográficas

1. Alves M. K., Alves B. K. **Topology optimization of elastic structures**, IV Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica, CIDIM 99, Vol. 2 - Mecânica dos Sólidos, Santiago, Chile, electronic publication-CD, 1999.
2. Babuska I., Zienkiewicz O. C., Gago J., Oliveira A. **Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations**, John Wiley & Sons, 1986.
3. Belblidia F., Lee J. E. B., Rechak S., Hinton E. **Topology optimization of plate structures using a single or three-layered artificial material model**, Advances in Engineering Software, v. 32, p. 159-68, 2001.
4. Belblidia F., Hinton E. **Fully integrated design optimization of plate structures**, Finite Element Analysis and Design, v. 38, p. 227-44, 2002.
5. Bendsoe M. P. **Optimization shape design as a material distribution problem**, Structural Optimization, v. 1, p. 193-202, 1989.
6. Bendsoe M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, 271 p.
7. Bendsoe M. P., Díaz A. R. **Optimization of material properties for Mindlin plate design**, Structural Optimization, v. 6, p. 268-70, 1993.
8. Bendsoe M. P., Díaz A. R., Kikuchi N. **Topology and generalized layout optimization of elastic structures**, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Topology Design of Structures, Sesimbra, p. 159-206, Portugal, 1992.
9. Bendsoe M. P., Díaz A. R., Kikuchi N. **Topology and generalized layout optimization of elastic structures**, in: Bendsoe, M. P. and Soares, C. A. M. ed., Topology Design of Structures, NATO ASI Series 227, (Kluwer Academic Publishers), p. 159-206, 1993.

10. Bendsoe M. P., Díaz A. R., Lipton R., Taylor J. E. **Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions**, Int. J. Numer. Meth. Engrg., v. 35, p. 1449-70, 1995.
11. Bendsoe M. P., Kikuchi N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 71(2), p. 197-224, 1988.
12. Bendsoe M. P., Rodrigues H. C. **Integrated topology and boundary shape optimization of 2-D solids**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 87(1), p. 15-34, 1991.
13. Bendsoe M. P., Sigmund O. **Material interpolation schemes in topology optimization**, Archive of Applied Mechanics, v. 69, p. 635-54, 1999.
14. Bugada G. **Estimación y corrección del error en el análisis estructural por el MEF**. Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Espanha, 1991.
15. Carey G. F. **Computational Grids: Generation, Adaptation, and Solution Strategies**, Washington: Taylor & Francis, 1997, 496 p.
16. Cheng G. D., Guo X.  **$\epsilon$ -Relaxed approach in structural topology optimization**, Structural Optimization, v. 13, p. 258-66, 1997.
17. Cheng K. T., Olhoff N. **An investigation concerning optimal design of solid elastic plates**, Int. J. Solids Structures, v. 17, p. 305-23, 1981.
18. Chickermane H., Gea H. C. **Design of multi-component structural systems for optimal layout topology and joint locations**, Engineering with Computers, v. 13, p. 235-43, 1997.
19. Christie W. C., Bettess P., Bull J. W. **Self-designing structures: a practical approach**, Engineering Computations, v. 15, n. 1, p. 35-48, 1998.

20. Chu D. N., Xie Y. M., Hira A., Steven G. P. **On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints**, Finite Elements in Analysis and Design, v. 24, p. 197-212, 1997.
21. Costa Jr. J. C. A., Alves M. K. **Layout optimization with  $h$ -adaptivity of structures**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 58(1), p. 83-102, 2003.
22. Costa Jr. J. C. A., Alves M. K. **Topology optimization with  $h$ -adaptivity of thick plates**. In: GIMC-third joint conference of italian group of computational mechanics and ibero-latin american association of computational methods in engineering, Italy, CDRom media, 2002.
23. Cox H. L. **The theory of design**, Aeronaut. Res. Council Rep. No. 19791, 1958.
24. Díaz A. R., Bendsoe M. P. **Shape optimization of structures for multiple loading condition using a homogenization method**, Structural Optimization, v. 4, p. 17-22, 1992.
25. Díaz A. R., Kikuchi N. **Solution to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method**, Int. J. Numer. Meth. Engrg., v. 35, p. 1487-502, 1992.
26. Díaz A. R., Lipton R., Soto C. A. **A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reissner-Mindlin plates**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 123, p. 121-39, 1995.
27. Duysinx P., Bendsoe M. P. **Topology optimization of continuum structures with local stress constraints**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 43(8), p. 1453-78, 1998.
28. Duysinx P., Sigmund O. **New Development in handling stress constraints in optimal material distribution**, In 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Design Optimization, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Saint Louis, Missouri, EUA, paper 98/4906/1-9, 1998.
29. Fox R. L. **Constraint surface normals for structural synthesis techniques**, AIAA J. v. 3, n.8, p. 1517-18, 1965.



- 
30. Gea H. C. **Topology optimization: a new microstructure-based design domain method**, Computers & Structures, v. 61, n. 5, p. 781-88, 1996.
  31. George P. L., Borouchaki H. **Triangulation de Delaunay et Maillage: Application aux Éléments Finis**. Paris: Hermes, 1997, 432 p.
  32. Georges M. K., Shephard M. S. **Automated adaptive two-dimensional system for the *hp*-version of the finite element method**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 32, p. 867-93, 1991.
  33. Gibiansky L. V., Cherkaev A. V. **Microstructures of composites of external and exact estimates of provided energy density**, Technical Report, Ioffe Science and Technology Institute, Leningrad (in Russian), (1987); Also in Kohn RV (ed.), Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, Birkhauser, New York, USA, 1994.
  34. Guedes J. M., Kikuchi N. **Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 83, p. 143-98, 1990.
  35. Haber R. B., Jog C. S., Bendsoe, M. P. **Variable topology shape optimization with a control on perimeter, in advances in design automation**, DE-Vol. 69-2, eds. Gilmore, B. J., Hoetzel, D. A., Dutta, D., Eschenauer, H. A., ASME, New York, p. 261-72, 1994.
  36. Hemp W. S. **Optimum Structures**, Oxford: Claredon , 1973, 123 p.
  37. Hinton E., Sienz J. **Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure**. Engineering Computations, v. 12, p. 229-44, 1995.
  38. Kant T. **Numerical analysis of thick plates**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 31, p. 1-18, 1982.
  39. Kikuchi N., Cheng H. C., Ma Z. D. **Optimal shape and topology design of vibrating structures**, Advances in Structural Optimization, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 189-222, 1995.

- 
40. Kikuchi N., Suzuki K. **Structural optimization of a linearly elastic structure using the homogenization method**, in: Rozvany G. editor, Shape and Layout Optimization in Structural Design, CISM Lecture Notes No. 325, (Springer-Verlag), p. 199-242, 1992.
  41. Kirsch U. **Optimal Topologies of Structures**. Appl. Mech. Rev., v. 42, n. 8, p. 223-39, aug. 1989.
  42. Kohn R. V., Strang. G. **Optimal design and relaxation of variational problem**, Comm. Pure. Appl. Math., 39, p. 1-25, 139-82, 353-77, 1986.
  43. Krog L. A., Olhoff N. **Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives**, Computers & Structures, v. 72, p. 535-63, 1999.
  44. Li Q., Steven G. P., Querin O. M., Xie Y. M. **Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization**. Int. J. Heat Mass Transfer, v. 42, 3361-71, 1999.
  45. Luire K. A., Cherkaev A. V. **G-closure of some particular sets of admissible material characteristics of the problem of bending of thin plates**, J. Optim. Theory Appl., v. 42, p. 305-15, 1984.
  46. Ma Z. D., Kikuchi N., Cheng H. C. **Topological design for vibrating structures**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 121, 259-80, 1995.
  47. Medeiros L. A., Miranda M. M. Espaços de Sobolev (iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos), Instituto de Matemática – UFRJ, ISBN: 85-87674-03-X, 2000
  48. Michell A. G. M. **The limits of economy of material in framed structures**, Philosophical Magazine, Series 6, v. 8, p. 589-97, 1904.
  49. Min S., Kikuchi N. **Optimal reinforcement design of structures under the buckling load using the homogenization design method**, Struct. Engrg. Mech., v. 5(5), 565-76, 1997.

- 
50. Mlejnek H. P., Schirmacher R. **An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 106, p. 1-26, 1993.
  51. Murat F., Tartar L. **Optimality condition and homogenization. In: Nonlinear variational problems**, Marino A. et al. (eds.), Boston: Pitman Advanced Publishing Program, p. 1-8, 1985.
  52. Pedersen P. **On optimal orientation of orthotropic materials**. Structural Optimization, v. 1, p. 101-06, 1989.
  53. Petersson J., Sigmund O. **Slope constrained topology optimization**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 41(8), 1417-34, 1998.
  54. Prager W. A. **Note on discretized Michell structures**, Comput. Mech. Appl. Mech. Engrg., v. 3, n. 3, p. 349-55, 1974.
  55. Prager W., Rozvany G. I. N. **Optimal layout of grillages**, Journal of Structural Mechanics, v. 5, n.1, p. 1-18, 1977.
  56. Querin O. M., Steven G. P., Xie Y. M. **Evolutionary structural optimization using Additive Algorithm**, Finite Element Analysis and Design, v. 34, p. 291-308, 2000a.
  57. Querin O. M., Young V., Steven G. P., Xie Y. M. **Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 189, p. 559-73, 2000b.
  58. Ramm E., Maute K., Schwarz S. **Adaptive topology and shape optimization**, Fourth World Congress in Computational Mechanics-IACM, Buenos Aires, Argentina, electronic publication-CD, 1998.
  59. Reynolds D., McConnachie J., Bettess P., Christie W. C, Bull J. W. **Reverse adaptivity – a new evolutionary tool for structural optimization**, Int. J. Numer. Meth. Engrg., v. 45(5), p. 529-52, 1999.

- 
60. Rong J. H., Xie Y. M., Yang X. Y, Liang Q. Q. **Topology optimization of structures under dynamic response constraints**, Journal of Sound and Vibration, v. 234, n. 2: p. 177-89, 2000.
  61. Rozvany G. I. N. **Optimality criteria for grids, shells and arches, in Optimization of Distributed Parameter Structures** (eds E.J. Haug & J. Cea), Proceedings of NATO ASI, Iowa City, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan der Rijn, p. 112-51, 1981.
  62. Rozvany G. I. N. **Layout theory for grid-type structures**. In: Bendsoe M. P. and Soares C. A. M. (ed): Topology design of structures, NATO ASI Series (Kluwer Academic Publishers), p. 251-72, 1992.
  63. Rozvany G. I. N., Wang C. M. **Extensions of Prager's layout theory**, in: Eschenauer H. and Olhoff N., ed., Optimization in structural design (Wissenschaftsverlag, Mannheim), p. 103-10, 1983.
  64. Rozvany G. I. N., Zhou M., Birker T., Sigmund O. **Topology optimization using iterative continuum-type optimality criteria methods for discretized systems**, In: Bendsoe M. P. & Soares C. A. M. (ed): Topology Design of Structures, NATO ASI Series (Kluwer Academic Publishers), p. 273-86, 1992.
  65. Rozvany G. I. N., Zhou M., Sigmund O. **Optimization of Topology**, In: Advances in Design Optimization, ed. H. Adeli, London: Chapman & Hall, p. 340-99, 1994.
  66. Sanchez-Palencia E. **Non-homogeneous media and vibration theory**, Lecture Notes in Physics, document#127, Berlin: Springer-Verlag, 1980.
  67. Schmit L. A. **Structural design by systematic synthesis**, Proceedings, 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, p. 105-22, 1960.
  68. Schwarz S., Maute K., Ramm E. **Topology and Shape Optimization for Elastoplastic Structural Response**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 190, p. 2135-55, 2001.

- 
69. Sigmund O., Petersson J. **Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima**, Structural Optimization, v. 16, p. 68-75, 1998.
  70. Soto C. A., Díaz A. R. **Optimum layout and shape of plate structures using homogenization**, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Topology Design of Structures, Sesimbra, Portugal, 1992.
  71. Soto C., Díaz A. R. **On modeling of ribbed plates for shape optimization**, Structural Optimization, v. 6, p. 175-88, 1993.
  72. Suzuki K. **Shape and layout optimization using homogenization method**, PhD Thesis, University of Michigan, 1991.
  73. Suzuki K., Kikuchi N. **A homogenization method for shape and topology optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 93, p. 291-318, 1991.
  74. Svanberg K. **The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization**, Int. J. Numer. Meth. Engrg., v. 24, p. 359-73, 1987.
  75. Tenek L. H., Hagiwara I. **Static and vibrational shape and topology optimization using homogenization and mathematical programming**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 109, p. 143-54, 1993.
  76. Vanderplaats G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications**, Boston: McGraw-Hill Book Company, 1994.
  77. Wilberg N. E., Abdulwahab. **Error estimation with postprocessed finite element solutions**. Computers & Structures. v. 64(1-4), p. 113-37, 1997.
  78. Xie Y. M., Steven G. P. **Evolutionary structural optimization for dynamic problems**, Computer & Structures, v. 58, n. 6, p. 1067-73, 1996.
  79. Yang R. J., Chen C. J. **Stress-Based Topology Optimization**, Structural Optimization, v. 12, p. 98-105, 1996.

- 
80. Yang R. J., Chuang C. H. **Optimal topology design using linear programming**, Comp. Struct., v. 52(2), 265-75, 1994.
  81. Zhou M., Rozvany G. I. N. **The COC algorithm, part II: Topology, geometrical and generalized shape and optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 89, p. 309-36, 1991.
  82. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. **Adaptivity and mesh generation**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 32, p. 783-810, 1991.
  83. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. **The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 82, p. 95-113, 1990.

## Apêndice A

Com a aplicação do Método do Lagrangiano Aumentado, o problema de otimização de leiaute reduz-se a solução de uma sequência de problemas de otimização com restrições de caixa, a qual é resolvida por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de quase-Newton sem memória. Sendo assim, aqui se faz uma descrição da direção de descida adotada no algoritmo de minimização.

### A.1 Método do Gradiente Projetado

O método de projeção a ser considerado é caracterizado por iterações cujos movimentos são nas direções de descida, os quais são restringidos a residirem em domínios poliédricos. Consequentemente os pontos obtidos ao longo do processo iterativo são factíveis e o valor da função objetivo decresce constantemente.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com restrições do tipo caixa:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (\text{a.1})$$

sujeito a

$$x_i^{\inf} \leq x_i \leq x_i^{\sup}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{a.2})$$

Seja  $\mathbf{x}^k$  um ponto factível, da  $k$ -ésima iteração do problema de otimização, o qual tem associado  $q$  restrições de desigualdade ativas. Definem-se por restrições ativas, as restrições de desigualdade lateral que satisfazem:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_i - x_i^{\inf}| < \text{tolg} \\ \text{ou} \\ |x_i - x_i^{\sup}| < \text{tolg}, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{a.3})$$

As restrições laterais podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} g_{2i-1}(\mathbf{x}) &= x_i^{\inf} - x_i \leq 0; \\ g_{2i}(\mathbf{x}) &= x_i - x_i^{\sup} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{a.4})$$

daí

$$\frac{\partial g_{2i-1}}{\partial x_j} = -\delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i-1} = -\mathbf{e}_i ; \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial g_{2i}}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i} = \mathbf{e}_i . \quad (\text{a.6})$$

Define-se também a matriz  $[\mathbf{N}_q]$  composta pelos gradientes das restrições ativas, i.e.,

$$[\mathbf{N}_q] = [\pm \mathbf{e}_{i1} \vdots \cdots \vdots \pm \mathbf{e}_{iq}] = [\pm \nabla \mathbf{g}_{i1} \vdots \cdots \vdots \pm \nabla \mathbf{g}_{iq}]. \quad (\text{a.7})$$

O método do gradiente projetado consiste basicamente em partir de  $\mathbf{x}^k$  e determinar  $\mathbf{x}^{k+1}$  através de uma iteração do tipo direção de descida:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k \quad (\text{a.8})$$

onde  $\alpha^k$  é o comprimento do passo ao longo da direção de descida  $\mathbf{s}^k$ , associada à  $k$ -ésima iteração. Desta forma, o problema consiste principalmente na determinação de uma direção de descida  $\mathbf{s}$  que produz a máxima diminuição em  $f(\mathbf{x})$  para um passo unitário, ( $\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle} = 1$  - dependente da métrica utilizada), no subespaço das restrições ativas, i.e.

$$\min_{\mathbf{s}} \left\{ \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) \right\} \quad (\text{a.9})$$

sendo que  $[\mathbf{M}]$  é simétrica e positiva definida. Em adição, como o problema contém restrições, impõe-se que  $\mathbf{s}^k$  pertença à interseção dos hiperplanos associados às restrições ativas. Logo,

$$[\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (\text{a.10})$$

Como resultado, o conjunto de restrições ativas permanece ativo em  $\mathbf{x}^{k+1}$ . A direção de descida a que faremos uso será dada por

$$\mathbf{s}^k = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{a.11})$$

onde  $[\mathbf{P}_q]$  é o operador projeção oblíquo.

- **Determinação do operador projeção oblíquo -  $[\mathbf{P}_q]$**



A função Lagrangiana associada ao problema de minimização com restrição, definido em (a.9) e (a.10), é dada por:

$$L(\mathbf{s}, \mu, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) + \left\langle \boldsymbol{\lambda}, [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} \right\rangle. \quad (\text{a.12})$$

Aplicando as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker associadas ao problema obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{s} = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{M}]^{-1} \left\{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\}; \quad (\text{a.13})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \therefore \quad \langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle = 1; \quad (\text{a.14})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 \quad \therefore \quad [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (\text{a.15})$$

Agora, de acordo com as eqs. (a.15) e (a.13) deriva-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} \right\} \nabla f. \quad (\text{a.16})$$

Além disso,  $[\mathbf{M}] \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$ , substituindo o valor de  $\mathbf{s}$  dado pela eq. (a.13), tem-se que:

$$\mu = \frac{1}{2} \left\langle [\mathbf{M}]^{-1} \left\{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\}, \left\{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{a.17})$$

ou ainda,

$$\mu = \frac{1}{2} \left\| \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\|_{\mathbf{M}^{-1}}, \quad (\text{a.18})$$

onde

$$\|\bullet\|_{\mathbf{M}^{-1}} = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathbf{M}^{-1}}} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{M}^{-1}} = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{a.19})$$

Substituindo as eqs. (a.16) e (a.18) na definição do vetor  $\mathbf{s}$  dado na eq. (a.13), obtêm-se:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f, \quad (\text{a.20})$$

onde o operador projeção oblíquo  $[\mathbf{P}_q]$ , ponderado por  $[\mathbf{M}]^{-1}$ , é dado por:

$$[\mathbf{P}_q] = [\mathbf{I}] - [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} [\mathbf{N}_q]^T. \quad (\text{a.21})$$

sendo  $[\mathbf{I}]$  a matriz identidade.

## A.2 Aproximação quase-Newton

Aqui é considerado que a aproximação da matriz Hessiana é denotada por  $[\mathbf{M}]$ . A sua respectiva inversa  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{M}]^{-1}$  pode ser aproximada por:

$$[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] + \left( 1 + \frac{\langle \mathbf{y}_k, [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] \mathbf{y}_k \rangle}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \right) \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{y}_k] [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] [\mathbf{y}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \quad (\text{a.22})$$

se  $\langle \mathbf{d}^k, \nabla f^k \rangle \leq -(\epsilonpsilon)^{1/2} \|\mathbf{d}^k\|_2 \|\nabla f^k\|_2$ , caso contrário  $[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{I}]$ . Aqui, define-se  $\mathbf{y}_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$  e  $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ .